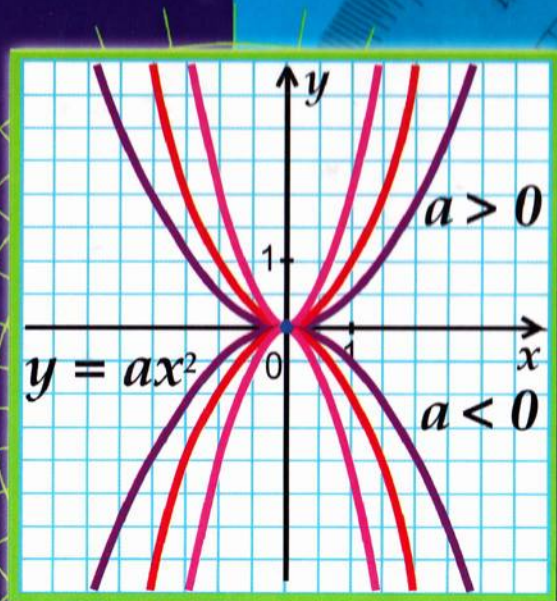


В.В. Мирошин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА



ЭКЗАМЕН

УДК 373:51
ББК 22.1я72
М64

Мирошин, В.В.
М64 Решение задач с параметрами. Теория и практика / В.В. Мирошин. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 286, [2] с.

ISBN 978-5-377-02250-3

Пособие посвящено созданию содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе общеобразовательной школы. Предложены методики, устанавливающие общие методы решения задач с параметрами, конкретные примеры, приводимые для усвоения соответствующих методов, подготовленные для использования в практике работы учителей математики.

Пособие предназначено для учителей, желающих создать методическую базу решения задач с параметрами.

Задачный материал содержит более 600 задач и может быть использован школьниками для самоподготовки.

УДК 373:51
ББК 22.1я72

Подписано в печать с диапозитивов 19.09.2008. Формат 60х90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 12,74.
Усл. печ. л. 18. Тираж 2000 экз. Заказ № 8930.

ISBN 978-5-377-02250-3

© Мирошин В.В., 2009
© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2009

Оглавление

Введение	7
Глава 1. Психолого-педагогические аспекты формирования содержательной методической линии «Задачи с параметрами» в системе школьного математического образования	11
§ 1. Система школьного математического образования в средней и старшей школе	11
§ 2. Системный подход в обучении	16
§ 3. Принципы разработки содержательно-методической линии задач с параметрами	27
§ 4. Анализ положения задач с параметрами в современной системе школьного математического образования	32
4.1. Статистический анализ	32
4.2. Методологический анализ	37
4.3. Психологический анализ	43
Выводы	46
Глава 2. Методологический анализ содержательной методической линии «Задачи с параметрами»	48
§ 1. Задачи с параметрами как аналоги научно-исследовательских задач прикладной математики	48
§ 2. Вопросы классификации задач с параметрами и методов их решения	56
2.1. Систематизация задач с параметрами	56
2.2. Некоторые методы решения задач с параметрами	61
Функциональный метод решения задач с параметрами	62
Графический метод решения задач с параметрами	62
Метод замены	63
Метод изменения ролей переменных	63
Метод перехода от общего к частному	63
Метод свободных ассоциаций	63
Метод обратного хода	65
§ 3. Методы декомпозиции алгебраических и трансцендентных уравнений и неравенств	65

3.1. Некоторые определения	65
3.2. Методы декомпозиции простейших уравнений	68
3.3. Методы декомпозиции некоторых неравенств	72
3.4. Некоторые частные методы декомпозиции	75
§ 4. Основные понятия задач с параметрами	76
4.1. Определение понятия «параметр» и «задача с параметрами» в пособиях	77
4.2. Определение понятия «параметр» в учебно-методических комплексах по математике	78
4.3. Определение понятия «параметр»	81
4.4. Основные понятия, связанные с определением параметра	85
4.5. Понятие решения задачи с параметрами	87
§ 5. Понятие общего решения уравнений и неравенств с параметром (параметрами)	91
5.1. Уравнение с одной переменной и одним параметром	91
5.2. Классы однотипности частных уравнений	95
5.3. Понятие общего решения неравенства с параметром	102
Глава 3. Реализация концепции формирования содержательно-методической линии задач с параметрами	106
§ 1. Линейное уравнение, линейное неравенство, линейная функция	106
1.1. Формирование понятия постоянной и переменной величин. Выделение из множества переменных параметров	106
1.2. Введение понятия уравнения, линейного относительно приоритетно выбранной переменной	110
1.2.1. Рассмотрение частных случаев линейных уравнений	110
1.2.2. Формулировка понятия «уравнение», «корень уравнения»	112
1.2.3. Этап усвоения	116
1.3. Линейная функция. Решение линейных неравенств с одной переменной	123
1.4. Линейное уравнение с двумя переменными. График линейной функции	128
1.5. Расстояние от точки до прямой	137
1.6. Системы линейных уравнений с двумя переменными	139

1.7. Линейное неравенство с двумя переменными	148
Метод областей на плоскости	149
1.8. Уравнения и неравенства, приводимые к линейным уравнениям	155
1.9. Задачи, использующие график линейной функции	157
§ 2. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в ходе изучения свойств квадратичной функции	163
2.1. Методика формирования содержательно-методической линии задач с параметрами в теме «Квадратный трехчлен. Квадратичная функция»	164
2.2. Предварительный этап: квадратное уравнение и квадратичная функция. Определение и график	165
2.3. Решение квадратных уравнений с параметрами по определению	167
Обучающий этап	170
2.4. Дискриминант квадратного трехчлена	173
2.5. Сохранение знака значений квадратного трехчлена	178
2.6. Корни квадратного трехчлена	183
2.7. Соотношение между корнями квадратного трехчлена. Теорема Виета	187
2.8. Расположение корней квадратного трехчлена относительно начала координат	190
2.9. Расположение корней квадратного трехчлена относительно точки p числовой оси	193
2.10. Расположение корней квадратного трехчлена относительно интервала $(p; q)$	196
2.11. Решение симметрических систем уравнений	204
2.12. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов	211
Приложение. Задачный материал	233
§ 1. Линейное уравнение. Линейная функция	233
1.1. Формулировка понятия «уравнение», «корень уравнения»	233
1.2. Общий вид линейного уравнения с одним параметром. Допустимые значения параметра	234

1.3. Решение линейных неравенств	236
1.4. Линейное уравнение с двумя переменными. Формирование первоначального понятия функции	238
1.5. Расстояние от точки до прямой	239
1.6. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Геометрический смысл решения	239
1.7. Линейное неравенство с двумя переменными	243
1.8. Уравнения и неравенства, приводимые к линейным уравнениям	245
1.9. Задачи, использующие график линейной функции	246
§ 2. Квадратное уравнение и квадратичная функция	251
2.1. Решение уравнений и неравенств с параметрами по определению	251
2.2. Дискриминант квадратного трехчлена	252
2.3. Соотношение между корнями квадратного трехчлена. Теорема Виета	254
2.4. Сохранение знака значений квадратного трехчлена	255
2.5. Расположение корней квадратного трехчлена относительно начала координат	259
2.6. Расположение корней квадратного трехчлена относительно произвольно выбранной точки p числовой оси	260
2.7. Расположение корней квадратного трехчлена относительно интервала $(p; q)$	260
2.8. Решение систем уравнений	261
2.9. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов	264
2.10. Метод интервалов решения неравенств	265
§ 3. Различные задачи с параметрами, использующие свойства линейной и квадратичной функций	268
Список использованной литературы	280

Введение

В «Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года» содержатся следующие положения:

«Роль математической подготовки в становлении современного человека определяет следующие цели школьного математического образования:

приобретение конкретных математических знаний, необходимых для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;
интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе;
формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;
формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии человеческой цивилизации и современного общества.

Порядок перечисления этих целей не определяет их иерархии, все они рассматриваются как одинаково значимые для формирования личности в процессе освоения математики».

Роль образования для развития творческих способностей личности неосценима. Особенно важна роль математики для развития творческого потенциала человека.

Как отмечается в книге [116]: «И так же, как каждому разумному человеку должна быть понятна роль физкультуры для здоровья и гармонического развития тела, всеми нами должна быть осознана особая роль тренировки и гармонического развития наших мыслительных способностей, нашего мозга. Но за всю историю человечества пока не найдено лучшего способа развития интеллектуальных и творческих способностей человека, чем при помощи математики» [116].

В книге [49] отмечается, что «важнейшим средством формирования у школьников высокой математической культуры, активизации обучения математике является эффективная организация и управление учебной деятельностью в процессе решения различных математических задач» [49].

В целом соглашаясь с приведенными выше высказываниями, мы должны отметить, что существующая ныне система учебных математических задач, созданная в основном во второй половине XX века, не отвечает в полном объеме современным требованиям. Теория и практика методики обучения математике показывают, что учащемуся недостаточно знать лишь предметное содержание математического факта для его полноценного усвоения. Требуется еще уметь видеть и понимать способы организации этого содержания, логическую структуру изучаемого, его место в общей системе математических знаний. Но для этого необходимо найти инструмент, позволяющий выработать у учащихся современный системный тип мышления ([114], [90], [7]), отвечающий настоящему этапу развития общества. Мышление всегда системно. Успешность решения той или иной задачи зависит от того, насколько системно подходит к ее анализу решающий задачу. Неудачи в решении зачастую связаны с отходом от системности, с недооценкой тех или иных связей между компонентами системы. Надо предоставить учащимся соответствующие подходы к решению задач и проблем. Нам видится, что задачи с параметрами представляют собой именно такой инструмент для реализации современных целей математического и не только математического образования учащихся. При этом решение задач будет осуществляться переходом на новый, более высокий уровень системности [5]. Следует отметить, что предлагаемая нами содержательно-методическая линия задач с параметрами прямо нацелена на формирование исследовательских способностей, элементов математического творчества учащихся.

В курсе алгебры [27, 136] основной школы выделяются следующие основные содержательно-методические линии: линия числа, тождественных преобразований, линия уравнений, неравенств и их систем, геометрическая, алгоритмическая, функциональная линии, а также появившаяся в последнее время вероятностно-статистическая линия. Однако ограниченность круга задач, предлагаемых в УМК, однотипность алгоритмов, присущих им, уже не может удовлетворять современным потребностям школьного образования. В средней и старшей школе превалирует классический подход к преподаванию не только математики, но и большинства предметов. Это объясняется рядом причин методического и психологического характера, в том числе и отсутствием инструментария реализации задач развивающего образования, необходимого современным учащимся.

Таким инструментарием в курсе математики на наш взгляд может стать содержательно-методическая линия задач с параметрами. Глубокая, богатая идеями и методами — содержательно-методическая линия задач с параметрами как нельзя лучше позволит развить активную творческую деятельность учащегося, его системное мышление, подготовить его к решению действительно творческих задач, которые со временем перед ним поставит сама жизнь. Глубина идей решения позволит системно выявлять категорию учащихся, которые в дальнейшем могут связать свою жизнь с точными науками. Однако и для других учащихся участие в решении задач с параметрами даст возможность занимать активную творческую позицию. Заметим, что наиболее высокая форма синтеза знаний реализуется в виде наук о самых общих свойствах природы. К числу таких наук относится, в первую очередь, философия, которая выявляет и отражает общие свойства существования материи. Поэтому идеи, методы и подходы, приносимые содержательно-методической линией задач с параметрами, могут быть еще в большей степени полезны «гуманитариям», нежели «технарям».

Однако само по себе решение задач с параметрами — не самоцель, а только средство. Можно было бы использовать любую другую содержательно-методическую линию задач — например, задач на построение или теорию графов, если они были столь же тщательно разработаны и также часто применяемы, были также богаты идеями и методами, доступными для понимания каждым учащимся, а не только учениками физико-математических школ и классов. Не секрет, что именно при решении математических задач школьники сознательно и прочно овладевают системой математических знаний [49]. Задачи с параметрами, нацеленные на формирование элементов математического творчества, исследовательских способностей учащихся, будут, как нам представляется, более чем что-либо служить развитию системного мышления учащихся.

В силу своего богатого общекультурного потенциала и развивающего характера, соответствия целям математического образования, они стали объектом пристального изучения многих математиков и методистов. В книгах таких авторов, как Моденов П.С., Моденов В.П., Новоселов С.И., Мордкович А.Г., Шарыгин И.Ф., Олехник С.Н., Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х., Башмаков М.И., Вавилов В.В., Галицкий М.А., Гольдман А.М., Голубев В.И., Марков В.К.,

Завич Л.И., Мельников И.И., Сергеев И.Н., Пасиченко П.И., Тынянин С.А., Ястребинецкий Г.А. и многих других рассмотрен широкий класс задач с параметрами и различные методы их решения. Однако используемый в литературе экстенсивный подход привел к увеличению примеров, не столько имеющих самостоятельную ценность, сколько затрудняющих ориентацию учащихся в обширном спектре разнообразных задач с параметрами. При таком подходе переориентация методической системы на приоритет развивающей функции обучения по отношению к ее образовательной, информационной функции как «основной задаче перестройки школьного математического образования» (Г. В. Дорофеев) не происходит. Задачам с параметрами, а также методам их решения, посвящены специальные разделы в пособиях для поступающих в вузы, отдельные монографии и диссертационные работы. В них рассмотрены разнообразные приемы и методы решения задач с параметрами.

Однако практически всегда конкретный учебный материал в них носит очевидный «постшкольный» характер. Изложение и предмет исследования чаще всего начинается там, где кончается обычная школьная программа, например, как это было принято на протяжении предшествующего десятилетия, по курсу «В». В подавляющем большинстве пособий ([76], [133], [25], [69], [120] и др.) явно или неявно подразумевается, что использующие их школьники свободно владеют основными методами решения любых задач школьной программы. В них показывают, как решать те или иные задачи с параметрами, но не учат, как научиться решать эти задачи, приводят методы решения, но не учат, почему надо выбрать именно их. С учетом же сложившейся тенденции расширения спектра уравнений и неравенств с параметрами, включаемых в содержание школьного курса математики в качестве дополнительных компонентов усвоения, рассматриваемый класс задач пока не составляет содержательно-методической линии.

Мы постараемся доказать, что содержательно-методическая линия задач с параметрами вовсе не обязана быть тяжеловесным дополнением к традиционным содержательно-методическим линиям, который по силам только отличникам и одаренным детям. Напротив, эта линия может и должна использоваться в общеобразовательной школе, привнося в обучение весь богатейший арсенал идей и методов, ей присущих.

Глава 1. Психолого-педагогические аспекты формирования содержательной методической линии «Задачи с параметрами» в системе школьного математического образования

§ 1. Система школьного математического образования в средней и старшей школе

«Классическая», или традиционная, система образования и порождавшая ее парадигма мышления представляет собой систему воспитания личности, сложившуюся в 17 веке в условиях ремесленного производства. Основанная на принципах дидактики, сформулированных философом и педагогом Я.А. Коменским, она способствовала развитию тех качеств учащихся, которые были необходимы каждому человеку того времени (повтор действий мастера, послушание). Результатом являлось воспитание личности с заранее заданными свойствами.

До недавнего прошлого к представителям российского (советского) общества предъявлялись по сути такие же требования: люди должны были получить возможность в течение жизни заниматься единственной профессией, в которой мало что могло меняться. С изменением социального устройства государства, естественно, изменились и цели образования. В настоящее время в течение первых 10–15 лет самостоятельной деятельности молодым людям приходится неоднократно изменять профиль своей профессии. Кроме того, как показывают современные социологические исследования, более половины современных молодых людей при переходе к самостоятельной жизни выбирает отнюдь не тот профиль работы, к которому его обучали в вузе.

В школьном обучении «цели традиционного образования несколько видоизменились, однако парадигма представления цели в виде набора запланированных знаний, умений и качеств осталась прежней» [110]. «Классическое» образование ориентировано на усвоение фактов, а не на творческое развитие личности, хотя оно и заявлено в целях современного образования. «Пытаясь навязать» всем одинаковые типы поведения через передачу уже установленных правил, требований общества, традиционное образование не дает реализовать

стремление личности к самоопределению и, следовательно, самореализации, так как на первом месте оказывается не сама личность, а продукт, который от нее можно получить в дальнейшем.

Математическое образование, в соответствии с классической парадигмой мышления, ориентировано на овладение системой знаний, умений и навыков, которые, как почему-то считается, необходимы каждому человеку в повседневной жизни и трудовой деятельности, достаточных для изучения других дисциплин, допускающих аналитический метод изучения — физики, химии и т.д., для продолжения образования. Содержание традиционного образования основывается на информационно-объяснительном подходе, когда достаточно большой объем знаний дается ученику в готовом виде. Без создания некоторой базы, естественно, обойтись невозможно. Но «для большинства школьников учение означает освоение и закрепление только преподаваемого им. Учение характеризует подражательность и авторитет учителя (что само по себе хорошо, если авторитет не переходит в авторитаризм). Учение происходит на фоне определенного равнодушия ученика к содержанию образования, которое лишено в глазах учащихся личностного смысла. «Учитесь, в жизни пригодится!» Но вот по большей части то, что изучают в школе, в повседневной жизни школьников и их родителей не представлено. Как в начальной, так и в основной школе преобладает установка на запоминание материала, а не на его обдумывание» [63]. Требование «всеобщего» овладения математическими знаниями, как, впрочем, и любыми другими, приводит к тому, что основным элементом, определяющим уровень этих знаний, становится наиболее слабый ученик. Действительно: автор или авторы учебников массовой школы ориентируются не на самого сильного учителя, который в дальнейшем будет работать с учебником. В силу массовости он или они должны ориентироваться на менее подготовленных учителей, а те, в свою очередь, на менее подготовленных учеников.

Существующая на данный момент система образования, заметим, не только математического, педагогочентрична. Главной фигурой в ней выступает не учащийся, а учитель, преподаватель. «Многочисленные частные проблемы могут быть решены только на основе правильного понимания общих принципиальных особенностей сложной деятельности педагога — главного действующего лица драматически продуманного во всех деталях спектакля под широко понимаемым на-

званием «Урок» [19]. Обычно в начале урока, построенного на принципе — объяснение, приведение примеров решения тех или иных задач, закрепление пройденного, учитель, сам того не желая, а чаще всего не осознавая, создает некий «эталон», который уже существует у него в голове. Этот эталон основан на том, как сам учитель (не ученик!) представляет себе правильное решение. Тут учитель может использовать разнообразные инструкции, но общий контекст один: «Делай, как я!». Поведение учащегося под действием серии подобных указаний «что следует», а «что не следует» становится вполне предсказуемым. Доверившись (а иного он и не может себе представить!) экспертной оценке учителя, ученик низводит свою ответственность до уровня выполнения того, что ему говорят. Он очень старается не делать того, «чего не следует», и заставляет себя делать то, «что следует». Это вызывает у него напряженное чувство постоянного ожидания одобрения со стороны учителя. Типовые задания требуют типовых решений и всякое отступление от «нормы» трактуется как отступление только в худшую сторону. Переменной считается движение от плохого к хорошему, но она иницируется не тем человеком, который должен меняться — не учеником, а учителем. Это происходит в оценочном контексте, и обычной ответной реакцией учащегося являются сопротивление, сомнение и боязнь неудачи. Лишаясь возможности самостоятельного выбора, учащийся не пытается получить удовольствие от учения, а пытается только угадать, какой результат мог бы устроить учителя. Собственные интересы учащегося здесь не учитываются. Ни ученик, ни учитель скорее всего не осознают, что такой подход к переменам подрывает внутреннюю готовность ученика учиться и нести ответственность за это обучение. На собственном опыте мы поняли, что наши инструкции, высказанные с самыми добрыми намерениями, иногда учениками воспринимаются как метод контроля, как недоверие, что представляет собой угрозу для их естественных способностей.

Существующая ныне система образования построена на страхе. Не на животном чувстве, а на чувстве страха быть непонятым и не принятым классом, группой, коллективом и т.д. Как указывают современные психологи [127, 128], «на оценку уровня возможных достижений значительное влияние оказывает уровень притязаний личности, особенно на первых этапах деятельности, например, в школе. Существенное влияние на процесс целеобразования оказывают соци-

альные факторы: положение ученика в учебной группе и уровень его достижений по отношению к групповым результатам. Проведенные исследования показывают, что ученик ориентируется:

- на среднегрупповой результат, стараясь быть не хуже, чем группа или класс в целом;
- на лучший результат в группе или классе (если результаты ученика выше, чем среднегрупповые);
- на ближайшего по уровню достижения ученика;
- на свои личные показатели (их изменение во времени).

В существующей системе образования ученик, как правило, стремится приблизиться по уровню достижений к ученику, ближайшему по учебным достижениям. Это явно проявляется в том, как ученики располагаются на уроке, хотя сами они, быть может, этого не воспринимают. Этот эффект называют «эффектом погони» [128]. «Если расхождения между субъективными показателями академической успеваемости и теми же показателями у учеников с ближайшими результатами достигают определенной величины, которая определяется как характером деятельности, так и личностными качествами, то ученик выбывает из «погони» и ориентируется только на свои успехи» [129]. Таким образом, личные успехи — ориентир либо для отличников, либо, как это не звучит странно, для неуспевающих.

Отсутствие альтернативы в выборе методов решений предлагаемых задач в существующих ныне линиях приводит к интересным результатам, проявляющимся при рассмотрении процесса усвоения алгоритма решения задач.

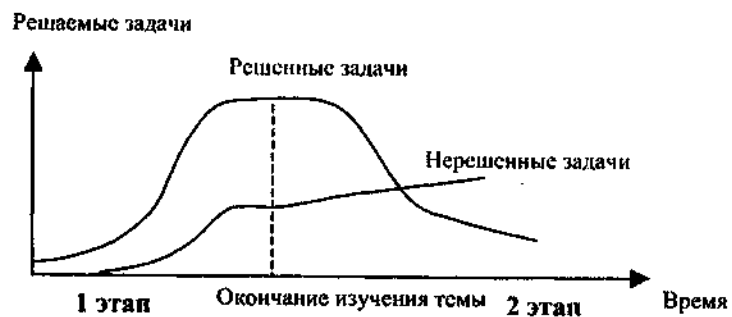


Рис. 1

Этап 1. На начальном этапе рассмотрения какой-либо темы в рамках алгоритмической линии построения курса количество решенных задач сначала растет медленно. Это объясняется неуверенным владением алгоритмом решения данного круга задач. Далее скорость решения и количество решенных задач резко возрастает — алгоритм усвоен, но сначала решаются только простые задачи, требующие его точного применения. Одновременно появляются задачи, которые неразрешимы в рамках приведенного алгоритма либо требуют достаточно большого времени на решение. Возникает ситуация «бега на месте» — затраты на решения нескольких задач начинают превышать затраты на решения всех предшествующих, а новых идей или методов решения при этом не возникает. Обычно такие задачи или вовсе не рассматриваются, либо откладываются «на потом».

Этап 2. Задачи, решаемые данным алгоритмом, почти исчерпаны, происходит переход к изучению другой темы, которая вовсе может быть никак не связана или в очень малой мере связана с предыдущей. Количество решенных задач через некоторое время начинает уменьшаться в силу того, что некоторые решения забываются, и, таким образом, количество нерешенных задач снова начинает расти.

Использование арсенала идей и методов, приносимых содержательной линией задач с параметрами, и построение курса на принципах обратной связи позволят сделать так, что кривая усвоения будет выглядеть следующим образом (Рис. 2).

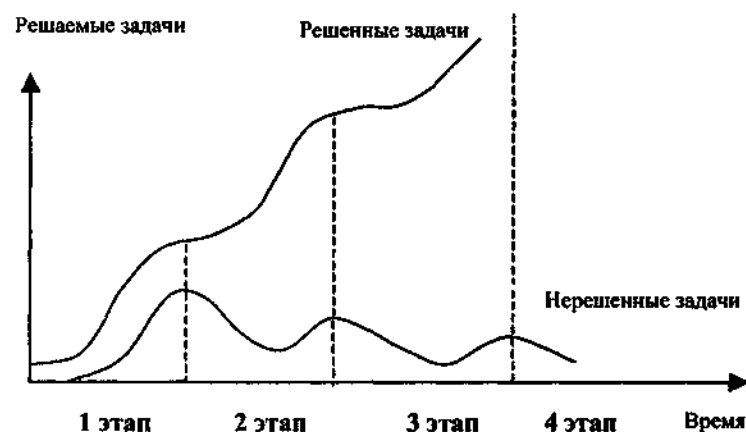


Рис. 2

Этап 1. Происходит накопление методов и идей, предлагаемых в рамках данной темы, выбирается какой-либо доминирующий метод решения задач и так же, как и в классическом случае, решаются простейшие задачи однако, при переходе к следующему этапу метод не исчерпывает себя, а обычно становится составной частью другого метода.

Этап 2. Комбинацией нового и старого метода решаются задачи, которые одним методом были неразрешимы или трудно разрешимы. Количество не решенных ранее задач уменьшается, а количество решенных снова растет. Затем и второй метод исчерпывает себя, однако можно предложить третий метод и т.д.

Таким образом, содержательно-методическая линия задач с параметрами, построенная по принципу обратной связи, предусматривает постоянное обращение к ранее использованным идеям и методам наряду с введением новых. Выбор метода решения задачи — прерогатива учащегося. Учитель выступает в роли некоторого заинтересованного благонастроенного наблюдателя, ведущего дискуссию между учащимися. Результативность такого подхода определяется по формуле: **РЕЗУЛЬТАТИВНОСТЬ = ПОТЕНЦИАЛ – ВМЕШАТЕЛЬСТВО.**

Классическую систему обучения можно охарактеризовать как одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием. Время ожидания ответа — реакции учителя на действие ученика — в этой системе играет большую роль. Приученный к постоянной оглядке в поиске «правильного ответа», ученик не способен принимать самостоятельные решения. Время получения ответной реакции в такой системе определяется самым слабым ее звеном, что приводит к неминуемым временным потерям. Ожидая ответа, ученики как бы выстраиваются в очередь. Предлагаемый нами подход меняет систему обслуживания — система остается системой массового обслуживания с ожиданием, но, по крайней мере, ожидание не сводится к ожиданию реакции учителя.

§ 2. Системный подход в обучении

Обучение — это системный процесс, что означает действие и предполагает изменение. В основе своей обучение — это петля обратной связи (Рис 3).

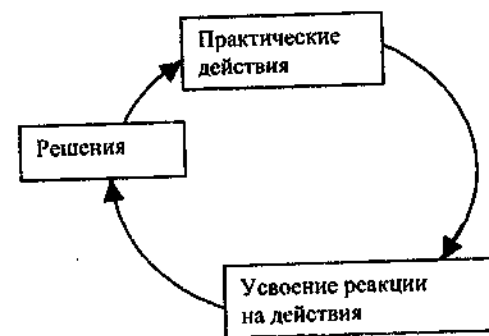


Рис. 3

Иногда кажется, что обучение — это особый вид деятельности (даже существует понятие «учебная деятельность»), который должен происходить в специально отведенном для этого месте под чьим-то наблюдением. В действительности обучение — процесс непрерывный, реализующий один из основных видов обратной связи в процессе жизни. Выполняя какие-либо действия (практические или мыслительные), человек усваивает реакцию на эти действия и принимает решения, инициирующие новые действия. Это механизм усиливающейся обратной связи — чем больше действий, тем сильнее реакция на них, что, в свою очередь, увеличивает количество новых решений. Но обучение никогда не бывает само по себе, так как во всяком обучении есть цель. Всегда существует разрыв между действительным положением дел и тем, что хотелось бы получить. Можно удовлетвориться достигнутым состоянием и стараться его не изменять. Можно поставить перед собой цель узнать больше, овладеть методикой решения тех или иных задач, постичь принципы их решения. В этом случае все наши действия будут направлены на достижение поставленной цели, и механизм обучения будет представлен приблизительно так (Рис. 4).

Может ли обучение не быть развивающим? Парадоксальность такой постановки вопроса почти очевидна. В самом деле, чему бы мы ни учились, так или иначе мы развиваемся, происходят какие-то изменения нашего сознания, личности, способностей. Разное обучение может вносить разный вклад в развитие, давать разный развивающий эффект, но это уже другой вопрос — оценка развивающего эффекта. Дает ли это основание делить обучение на развивающее и не развивающее? Бесспорно, всякое обучение внутренне связано с развитием

и одним из результатов имеет развитие. Проблема же состоит в том, как связаны между собой обучение и развитие.

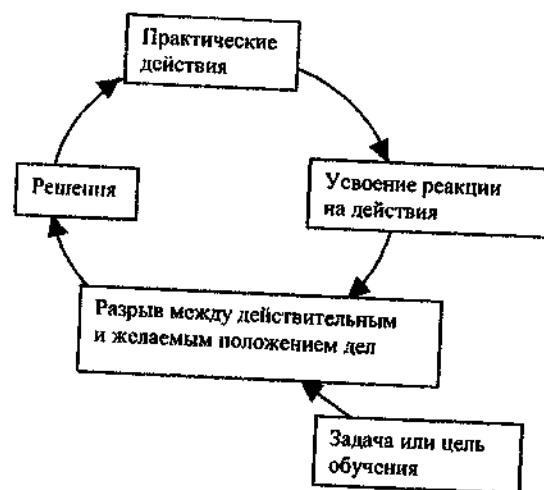


Рис. 4

Соотношение процессов обучения и развития может быть разным. Результатом любого обучения всегда являются некоторые сдвиги в развитии, но они — либо прямой результат, продукт, на который направлено обучение, либо — всего лишь побочное следствие. Обучение может быть направлено не на развитие, а на функциональную подготовку человека, и оно вовсе не задается вопросом о том, как развивается человек. Там есть другой критерий: как он выполняет определенные функции. Цель такого обучения — некий минимум, оптимум знаний, умений, навыков, так называемых «ЗУНов». Происходит ли при этом развитие? Да, но оно не планируется, оно происходит стихийно и непредсказуемо, оно может быть большим, меньшим и т.д. Развитие здесь имеется в виду как некая предпосылка обучения. Оно эксплуатирует стихийные результаты, стихийные достижения, приспособляется к ним, учитывает их и т.д. (например, дифференциация обучения в зависимости от интересов, способностей; тестирование, отбор и др.) Но само обучение вовсе не планирует развитие, не направлено и не рассчитано на него.

Этот обучающий цикл называют простым обучением, а иногда — обучением первого порядка или еще адаптивным обучением [90].

Простое обучение не затрагивает наших ментальных моделей, т.е. идей и представлений, которые мы используем для направления наших действий, для понимания причин и следствий наших действий, а также для осмысления нашего опыта.

Мы принимаем решения и выбираем свои действия из определенного набора, представляющего собой часть наших ментальных моделей. Примером подобного выбора служит отношение большинства учителей и учащихся к рассматриваемым нами задачам с параметрами. Считается, что все данные задачи «нестандартные», не предназначены для решения всеми учащимися. Причем это убеждение покоится не на собственном опыте этих учителей и учащихся, а на мнении, высказываемом кем-то другим, более авторитетным, чем сами учителя и учащиеся. Естественно, что в этом случае разрешение конфликта между действительным положением дел и желаемым будет решаться приближением желаемого уровня к действительному, а не стремлением увеличить действительный уровень знаний, чтобы достигнуть желаемого. В процессе простого обучения действует механизм уравнивающей обратной связи, направленный на обеспечение адаптации к достигнутому уровню и стабильности. «Синица в руках лучше журавля в небе» — пословица, отражающая суть простого обучения.

Преподавание любой дисциплины, основанное на принципах простого обучения, направлено на отработку и закрепление процедур, норм, подходов, с помощью которых наиболее просто достижение поставленных целей. И чем ближе будут находиться эти цели к уровню «среднего» учащегося, тем проще будет их достижение. Со временем выработанные способы преподавания и учения могут заостряться и стать барьером для поиска новых подходов. Нельзя найти большей помехи развитию, чем формализация подходов, которые были основой достижений в прошлом. Стоит вспомнить «метод опорных конспектов» В.Ф. Шаталова [131], «метод отдельной детали» Е.И. Ильина [44,45]. Транслирование этих методов в массовую школу не получилось не из-за того, что методы были плохи, а из-за формального подхода, из-за попытки их применять всеми и сразу.

Еще одно проявление неги уравнивающей обратной связи, препятствующей изменениям, это не лучшее отношение к учащимся, чем-то отличающимся, причем часто в лучшую сторону, от некоторого «среднего» стандарта.

В рамках простого обучения выстраивается односторонняя линейная связь между участниками учебного процесса — учеником и учителем, определяемая их ролевыми функциями. Отношения ученика и учителя все привыкли воспринимать так: учитель учит ученика. При таком сценарии ученик не задает вопросов, а учителя такое поведение устраивает, он не проверяет, насколько ученик усвоил материал урока. Учитель считает, что он — хороший учитель, и отсутствие вопросов это доказывает. Но ученик может просто ничего не понять.

Другой вариант — обучение, которое специально рассчитано на некий уровень развития. Будем ли мы в этом обучении получать умения, знания, навыки? Бесспорно, но различие с первым вариантом заключается только в одном: если там развитие является непредсказуемым, стихийным следствием, то здесь оно — прямой, планируемый результат. А знания, умения и навыки из цели превращаются в средства достижения результатов. Они перестают быть самоцелью. В результате такого обучения начинают изменяться наши ментальные модели. Существует много названий данного типа обучения — творческое, развивающее, порождающее или обучение двойного цикла [90] (Рис. 5).

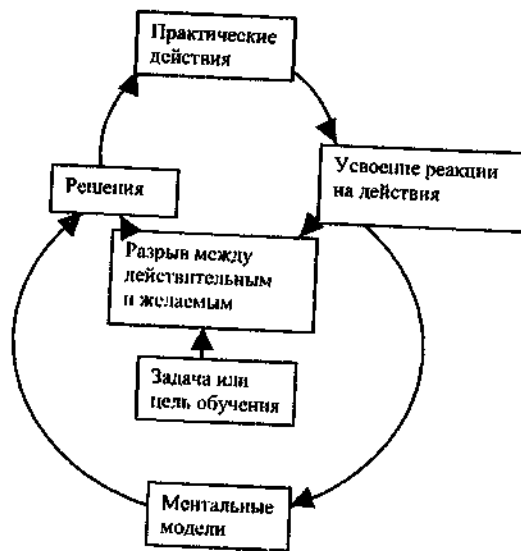


Рис. 5

Рассматриваемый контур обратной связи может минимизировать расхождение между желаемым и фактическим состоянием (уравновешивать систему) только в том случае, если наша цель — рост знаний, постоянное совершенствование, если мы готовы ставить под сомнение свои идеи и убеждения. Без подобной цели эта петля может быть только усиливающей, если только обратная связь не принесет настолько странную информацию, что это выведет нас из состояния самодовольства.

Порождающее обучение — это механизм уравновешивающей обратной связи, путь к обновлению наших ментальных моделей. Оно дает нам более широкие возможности выбора, новые стратегии и правила принятия решений. И тогда уже известная информация, но воспринятая через посредство других ментальных моделей, приведет к иным решениям и, таким образом, к новым действиям.

При таком типе обучения учитель, ориентируясь на ответы, вопросы и поведение учащихся, также непрерывно обучается. В результате ученик «вытягивает» из учителя именно то, что ему нужно узнать и усвоить. И чем лучше делает это ученик, тем более умелым кажется учитель.

В этом случае ученик как бы «учит» учителя учить, а учитель в результате этого взаимодействия «обучается» обучать. В этой связи становится понятно, почему в большинстве случаев т.н. «репетиторство» приносит более высокие результаты, чем обучение в массовой школе. Система «репетитор — ученик» обладает очень малым временем получения отклика на то или иное действие, как со стороны ученика, так и со стороны репетитора. Успех приходит тогда, когда учитель и ученик одновременно учат и учатся (Рис. 6).

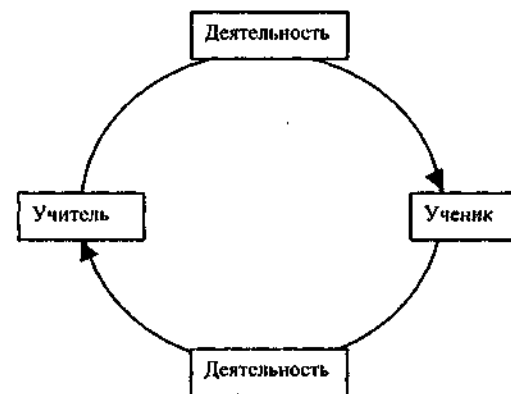


Рис. 6

Системный подход в обучении рекурсивен, иными словами, он берет определенные качества (в данном случае способность учить и учиться) и на более высоком уровне прилагает их к тому, что происходит во взаимодействии. В этом случае у учителя есть возможность научиться исполнять свою роль с еще большей эффективностью. Из вопросов ученика он почерпнет много полезного для работы, станет более восприимчивым и научится более доходчиво объяснять учебный материал. А ученик сможет понять способ мышления, благодаря которому учитель знает предмет, и это будет способствовать тому, что он лучше проникнет в суть собственного процесса обучения и модели, используемой учителем. В известном смысле роль учителя условна, так как учатся обе стороны, хотя и разным вещам. Системный подход как методология изучения процесса обучения исходит из того, что тот или иной объект рассматривается как система: целенаправленное множество различных элементов и связей. Целесообразность такого подхода к теории оправдывается тем, что он предписывает анализировать не только особенности функций элементов, их специфику, но и всю структуру взаимодействия элементов, способы их связей, а также то характерное, новое, что этим взаимодействием достигается при определенных условиях и без чего эффективность движения к цели может снижаться. Именно эффект взаимодействия имеется в виду тогда, когда проектируется система обучения, ее функции, структура элементов, их связи или подчиненность.

Охарактеризовать процесс обучения как систему можно, только проследив ее в динамике, т.е. выявив, каким образом меняется ее состав, структура в соответствии с ее функциями. При этом необходимо учесть, что речь идет об особой системе — системе деятельности и формирующихся, складывающихся в ее рамках отношений. Эта система создается людьми, существует для них, реализуется ими и через них.

Привнесение изменений в систему есть задача принятия решения — одна из основных задач системного анализа. Обычно под принятием решения понимают процесс выбора одной из нескольких альтернатив. При этом на первый план выступают такие собственно психологические особенности процесса принятия решения, как мотивация принятия решения, ответственность за принятое решение, право выбора, возможность осознания, степень риска при принимаемом

решении, оценки и коррекции вырабатываемых решений и т.д. Принимая решение изменить существующую на данный момент систему математического образования созданием содержательно-методической линии задач с параметрами, надо доказать, что в долгосрочной перспективе такое введение принесет положительные результаты.

Основное свойство любой системы — наличие цели. «Цель существующей системы математического школьного образования состоит в том, чтобы обеспечить уровень образования, достаточный для трансляции и воспроизведения высших образцов интеллектуальных искусств» [27]. Однако, как пишет Питер Друкер, автор книги «Посткапиталистическое общество» [35] «знание отличается от всех остальных ресурсов. Оно постоянно устаревает, так что сегодняшнее знание завтра уже станет невежеством. А знание, которое имеет значение, подвергается быстрым и резким изменениям — например, от фармакологии до генетики в здравоохранении или от персональных компьютера до Интернета в компьютерной отрасли. Продуктивность знания и работники, создающие его, будут не единственными факторами конкуренции в мировой экономике, но, скорее всего, — решающими». Таким образом, цели классической системы математического образования, заявленные в «Требованиях по математической подготовке учащихся» [98] и направленные на воспроизведение готовых знаний и алгоритмов, не соответствуют современному этапу развития общества в целом. Алгоритмическая линия, преобладающая в классической системе образования, не предоставляет учащемуся права самостоятельного выбора.

С другой стороны, содержательно-методическая линия задач с параметрами, как инструмент реализации системного подхода и системного мышления, предоставляет указанные возможности. Учащийся вправе сам выбирать метод решения параметрических задач, строить план решения, проводить его анализ. Цель обучения в этом случае сформулирована еще замечательным математиком и педагогом Д. Пойа: «Цель обучения — научить молодежь думать» [94].

Учебный процесс — система. Его элементами служат цели, содержание, формы, методы, средства и результаты обучения. Таким образом, «учебный процесс должен рассматриваться как абстрактная целостность, в которой системообразующим фактором является предметная деятельность учащихся». З.А. Решетова [102] представляет учебный процесс следующим образом (Рис 7):

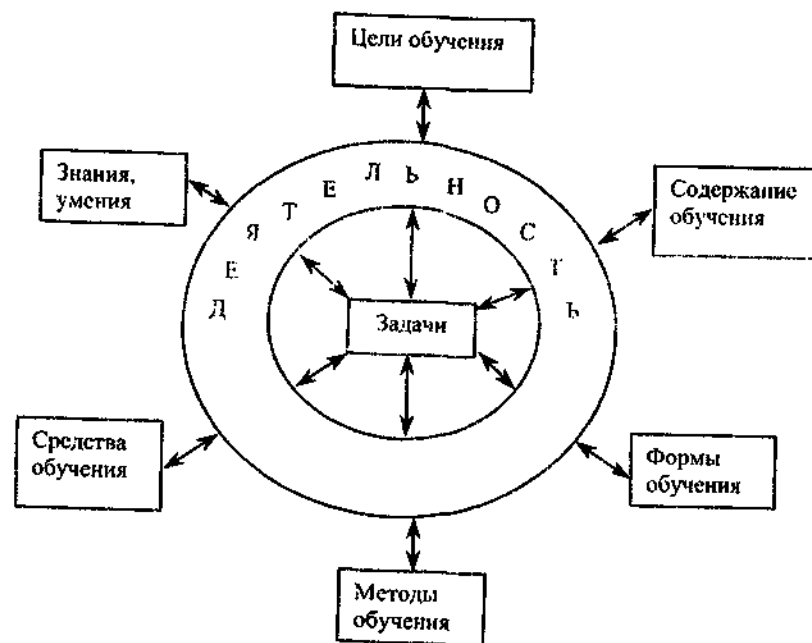


Рис. 7

В этой простой модели учебного процесса присутствуют 7 элементов. Существующая система стабильна, все ее элементы совместимы, и система работает. «Системообразующей связью здесь выступает предметная деятельность учащегося. Компоненты учебного процесса, начиная с целей и заканчивая оценкой его результатов, выступают в фокусе предметной деятельности учащегося, что позволяет выявить дефекты системы обучения и внести необходимые коррективы в любое ее звено» [114]. Н.Ф. Талызина определяет обучение как «деятельность учителя в учебном процессе», а деятельность «ученика, включенного в учебный процесс, как ученис» [114]. Таким образом, в классической системе деятельности учащегося и учителя рассматриваются как два различных вида деятельности.

В целях обучения определяются классы и типы задач, которые должен научиться решать учащийся на разных уровнях обучения, формы, виды и способы деятельности по их решению; существенные характеристики этой деятельности как сформированные умения; предметное содержание, формы обобщения и структура усваиваемых

знаний; планируемое развитие способностей (в частности, формирование новых мыслительных операций, мыслительных структур, «оперативных схем», ориентирующих мысленное воспроизведение предмета и деятельности с ним); характеристики формируемого мышления как системного. В иерархии целей обучения первое место занимает формирование деятельности учащегося (теоретической и практической) в фиксированных нормативах как общего фундамента, на котором будет выстроено многоэтажное здание всех его приобретений в процессе обучения: знаний, умений, способностей.

Содержание обучения выступает многокомпонентным образованием, включающим в себя:

- систему научных знаний о предмете, выражающую современные нормативы его теоретического описания как специфической системы;
- знания о деятельности, в которой формируются знания: цель, средства, способы организации и формы представления результата;
- реальные умения «исследовать», анализировать объект, выявлять его системные характеристики как специфической системы — целостность, сложность, организацию, многообразие форм существования как вариантов данной системы;
- умения использовать результаты теоретической деятельности (сформированные знания) как ориентировочную основу для решения конкретных задач.

Формы обучения выделяются по их функции. Теоретическое обучение выполняет функцию «производства», формирования знаний. Это не просто «словесное» обучение (лекция, инструктаж и т.п. формы передачи знаний), а совместная теоретическая деятельность (с учителем, с другими учащимися) по анализу предмета, в процессе которой выявляются разные его познаваемые содержания, принимающие форму знаний о нем. Разные виды обучения: лекция, семинар, лабораторные занятия, практикум, самостоятельная работа с литературой и т.д. — формы теоретического обучения, поскольку они выполняют функцию «исследовательской» деятельности, формирующей знания. Практическая форма — не «делание руками» или упражнения в практическом решении задач, а обучение, формирующее умения и навыки целенаправленного преобразования объекта в разных условиях с использованием сформированных знаний в качестве ориентировочной основы практической деятельности. Смысл приобретенных

знаний, их истинность и культурная ценность открываются через функцию ориентировать преобразовательную деятельность.

Метод обучения рассматривается как способ организации деятельности усвоения знаний, умений, формирования и развития способностей. Исходным моментом здесь выступает формирование и усвоение самой деятельности. При этом в процессе усвоения следует различать формирующуюся, становящуюся деятельность и уже сформированную, ставшую умением. Формирующаяся деятельность еще не обрела свой внутренний план, внутреннюю программу, позволяющую субъекту самостоятельно и в требуемых нормативах выполнить деятельность — у нее еще нет сформированной адекватной ориентировочной основы. Она выполняется и регулируется программой извне (задаваемой обучающим, письменной инструкцией, учебником и т.д.). Уже сформированная деятельность имеет ориентировочную основу, выполняющую функцию внутреннего регулятора. Процесс усвоения рассматривается как деятельность, формирующая свой внутренний план — ориентировочную основу в характеристиках, обеспечивающих нормативное ее функционирование как умения.

Важно соблюдать принцип системности, потому как можно радикально менять и ломать какой-то элемент системы, но качественные изменения при этом не наступят. Ибо если целью является ценностная перориентация обучения с предметно-содержательных проблем на личностно-предметные, то следствием этого должно стать новое качество, когда в центр ставят личность, индивидуальности обучающегося и обучающего, ученика и учителя, их неповторимость и самосовершенствование, а не только предмет как таковой.

С точки зрения системного подхода системообразующей связью в учебном процессе выступает совместная деятельность и учащегося и учителя. Подходя с этих позиций, учебный процесс может быть представлен следующим образом (Рис. 8).

В предлагаемом подходе учитель и ученик — две составные равноправные стороны, стоящие в центре системы обучения. Роль учителя в ней не менторская, а скорее советническая. Учитель как бы «искушает» учащегося, предлагая ему соучастие в поиске решения. Роль ученика — не роль пассивного исполнителя не интересной для него самой работы, а создателя собственных знаний. Отступая от классической школьной формы построения урока, мы предлагаем использовать форму, приближенную к высшей школе — лекционно-

семинарскую. На первоначальном этапе рассматривается вся общность, отвечающая данной теме, затем предлагается ряд задач, различных по содержанию, допускающих различные альтернативные методы решения. И здесь, как нельзя, кстати, подходят задачи с параметрами. Можно, конечно, использовать и другие задачи, однако, только задачи с параметрами существуют для всех без исключения тем школьного курса.

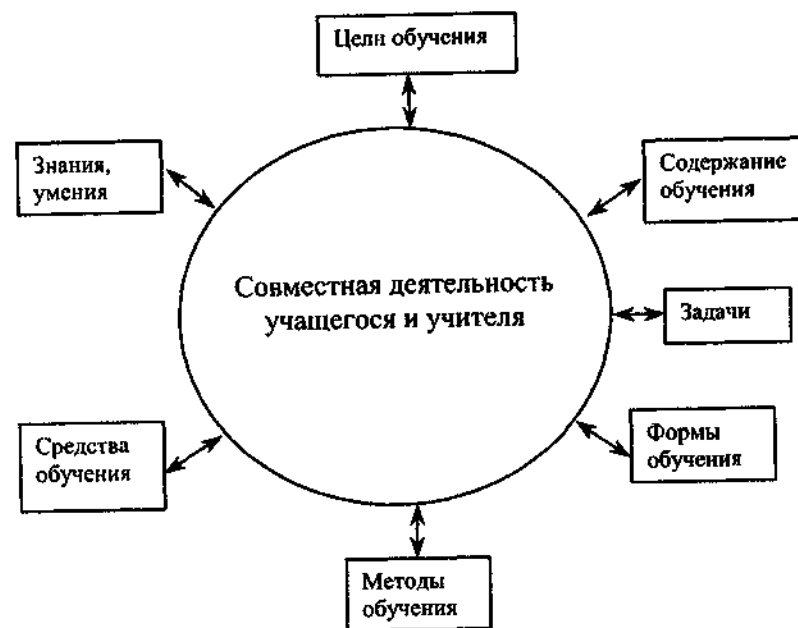


Рис. 8

§ 3. Принципы разработки содержательно-методической линии задач с параметрами

В школьной математике хорошо известны различные содержательно-методические линии ([79], [36], [23], [67] и др.): арифметическая, числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, эквивалентностей или равносильных преобразований, алгоритмическая и т.д., однако устоявшееся определение данного понятия отсутствует.

Некоторые из названных линий существуют только в курсе школьной математики, появляясь в определенных местах курса (арифметическая линия), некоторые проходят через весь курс (функциональная, алгоритмическая линии), являясь «сквозными методическими линиями» [67], имеющими продолжение и в курсе высшей математики.

Термином «содержательно-методическая линия» обучения обычно обозначают «систему примеров, задач, которые опираются на соответствующие понятия, определяющие линию, а также присущие ей методы решения» [67].

Как, например, отмечается в книге [70] «с линией тождественных преобразований связаны все линии курса алгебры. Изучение линии тождественных преобразований предполагает выделение четырех этапов: пропедевтического (5–6 классы); первого, на котором используется нерасчлененная система преобразований (начало 7 класса); второго, в процессе которого выделяются конкретные виды преобразований (8–9 классы), и третьего, который организует целостную систему преобразований (10–11 классы)». Однако следует отметить, что скорее весь курс алгебры так или иначе связан с линией равносильных преобразований, нежели с линией тождественных преобразований. Название содержательной линии отдает дань традиции.

Алгоритмическая линия также является одной из основных линий любого курса математики. «Алгоритмы автоматизируют процесс решения задачи. Тем самым можно говорить об алгоритмизации как о едином методе, едином подходе к унификации решения задач из всех разделов математики. Поэтому мы говорим об алгоритмической линии как о пути в математике, идя по которому можно увидеть хотя бы часть ее величия и красоты» [67].

Можно поспорить с автором данного утверждения в той части, что полностью алгоритмизировав процесс решения любой (!) задачи, можно увидеть красоту математики. Конечно, алгоритмы решения типовых задач составляют базу для решения более сложных задач, способствуют выработке начальных навыков, но полностью алгоритмизированный курс математики может привести только к упадку интереса учащихся. Действительно, зачем думать над той или иной задачей, если достаточно взять какой-либо справочник и подставить в нужные формулы исходные данные. Формируемая нами содержательно-методическая линия задач с параметрами как раз и направлена на развитие самостоятельного мышления, выработку умения посту-

пать нестандартно, принимать решения там, где алгоритмы этого решения или вовсе отсутствуют, или их еще предстоит создать.

Понятие функции является одним из основных понятий курса математики [79,80]. На функциональной основе формируется большинство понятий алгебры и геометрии. Функциональные зависимости (заметим, от одной переменной) используются в разных науках и учебных дисциплинах. Изучение функции в школе позволяет показать учащимся значимость и распространенность этого понятия, увидеть, что практически нет учебных предметов, где бы ни изучались функции; многие законы, связи имеют функциональную основу.

Если рассматривать развивающие цели, то изучение функций, в первую очередь, способствует развитию системного мышления, отвечающего за видение зависимостей между изменениями разных объектов, а также целям, которые ставятся при изучении алгебраического материала (развитие умения работать с абстрактным материалом, умения анализировать и др.). Линия задач с параметрами не только продолжит функциональный подход, но и значительно расширит возможности исследования реальных процессов, которые в большинстве случаев зависят от целого комплекса переменных. Таким образом, линия задач с параметрами будет иметь продолжение в курсе высшей математики, являясь пропедевтикой содержательно-методической линии функций многих переменных.

Сформулируем некоторые принципы, которые были выработаны нами в процессе разработки указанной тематики в рамках конкретных учебных тем школьной математики.

1. Принцип консервативности (наследственности). Каждая задача с параметром должна (особенно в средней школе, на этапе формирования всей содержательной методической линии) самым прямым и непосредственным образом быть связана с основным, базовым учебным материалом. С точки зрения содержания программы обучения тут не должно быть «ничего нового». Здесь более чем хватает новизны в самой постановке вопросов, в разнообразии подходов к исследованию задания. Даже простейшие примеры могут служить материалом для такого исследования. Рассматривая, например, задачу: «Решите уравнение $4 + mx = 3x + 1$ » и слегка меняя ее формулировку, можно получить абсолютно новое по своей сути задание: «Найдите значение переменной x , которое не может быть решением уравнения $4 + mx = 3x + 1$ ни при одном значении параметра m ».

2. Принцип от простого — к сложному. Главная функция методики заключается в определении средств и методов, с помощью которых на базе имеющегося содержания реализуются основные цели обучения. Первый шаг состоит в том, что мы объявляем своей задачей развитие математического и, конкретнее, теоретического мышления, заменяя им одним все перечисленные в целях виды развития, и считаем такую замену вполне адекватной. Теперь возникает вопрос о способах измерения уровня теоретического развития и методах повышения этого уровня. И тут естественным образом мы вспоминаем о таком явлении, как задача с параметрами. Постулируется следующее утверждение: уровень математического развития школьника эквивалентен уровню сложности решаемых им задач. Задача становится одновременно и целью и средством обучения. Все проблемы переводятся в плоскость задач: мы должны разработать методы оценки уровня сложности задачи и методики, развивающие умение решать достаточно сложные задачи.

3. Принцип активизации учебной деятельности. Виды учебной деятельности можно упорядочить по степени активности ученика. С одной стороны располагаются пассивные виды учебной деятельности, а с другой — активные. Можно принять за аксиому то, что более активные виды учебной деятельности дают лучший результат. Принцип активизации учебной деятельности выводит на первые роли в учебном процессе задачу, а особенно задачу с параметрами.

4. Принцип естественности. Как продолжение предыдущего принципа, на наш взгляд, необходимым условием формирования нормального отношения к задачам с параметрами со стороны учащихся является естественность появления этих задач. Успешное исследование и решение задачи с параметром явным образом должно демонстрировать, что, в принципе, мы просто ознакомились с уже известным нам объектом, но на более тонком уровне.

Например, одним из наиболее используемых понятий в школьной математике является дискриминант квадратного трехчлена. Дискриминант квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac$ ассоциируется у большинства учащихся только с процессом вычисления величины его корней. Если дискриминант есть величина неотрицательная, то существуют два корня квадратного трехчлена, вычисляемые по известным формулам, если дискриминант отрицателен, то квадратный трехчлен действительных корней не имеет и дальнейшее решение невозможно. Таким обра-

зом, дискриминант рассматривается в качестве самостоятельного, утилитарного понятия. Однако неотрицательность дискриминанта является условием, равносильным существованию корней. Формулировка данного утверждения в явном виде не присутствует ни в одном УМК по математике.

5. Принцип актуальности (значимости). Крайне желательно, чтобы задача с параметрами, а точнее, ее успешное решение, имело бы ясную школьнику учебную значимость, возможность использования или применения результатов в других задачах или дальнейшей самостоятельной работе. Здесь будет правильным указать на то, что эти задачи есть простейшие модели настоящих научно-исследовательских задач, с которыми, возможно, учащимся придется столкнуться в будущем.

6. Принцип перспективности. Преподавателям и учителям хорошо известно, что замена числовых данных конкретной задачи на параметры открывает практически неограниченные возможности по разработке и получению или аналогичных, или совершенно новых задачных ситуаций. Образно говоря, в одной комнате, где хранится числовой ответ к конкретной задаче, на самом деле имеется множество невидимых на первый взгляд дверей, при открытии которых возникают совершенно другие комнаты, коридоры, переходы, дворцы и замки. В полной мере формирование такого понимания задач с параметром возможно только к окончанию школы. Но представление о том, что введение параметров в обычных задачах открывает перспективы перехода к качественно новым учебным вопросам, можно и полезно формировать уже и в простейших ситуациях.

7. Принцип концентричности. Усвоение новых знаний, новых понятий, новых методов решения задач должно постоянно опираться на ранее полученные результаты, методы и приемы применять их в ходе решения вновь рассматриваемых задач. Только в процессе постоянного совершенствования применения ранее приобретенных методов решения и включения новых можно реализовать системный подход к решению не только задач с параметрами, но и любых других проблем.

8. Принцип активного усвоения. В книге замечательного математика и педагога Д. Пойя (George Polya) «Математическое открытие» приведены следующие слова: «Лучший способ изучить что-либо — это открыть самому. То, что вы были принуждены открыть сами, составляет в вашем уме дорожку, которой вы сможете снова воспользо-

ваться, когда в том возникнет необходимость»[93]. В этом заключается принцип активного усвоения. Задачи с параметрами являются прекрасным средством для воплощения этого принципа в обучении математике.

§ 4. Анализ положения задач с параметрами в современной системе школьного математического образования

4.1. Статистический анализ

Положение всего комплекса учебно-методических и педагогических вопросов, связанных с задачами с параметрами, в современном математическом образовании в нашей стране достаточно уникально. С одной стороны, эти задачи есть и в весьма заметном количестве, а с другой стороны, их практически нет. С одной стороны, все учителя в какой-то мере знакомы с простейшими приемами их решений, с другой — старательно избегают последовательного использования этих задач.

Если излагать последние тезисы более детально, то начать следует с того несомненного факта, что задачи с параметром традиционно включаются в большинство вариантов письменных вступительных экзаменов на факультеты вузов, предполагающие серьезную математическую подготовку абитуриентов. Например, вот небольшая таблица, в которой собраны данные о наличии задач с параметром в вариантах вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ им. М.В. Ломоносова за 1970-2006 гг. Во втором столбце указан процент тех вариантов, в которых присутствовали задачи с параметрами.

Таблица 1

Факультет МГУ	Процент вариантов, содержащих задачи с параметрами
Механико-математический факультет	85 %
Вычислительной математики и кибернетики	80 %
Психологический факультет	80 %
Экономический факультет	65 %
Географический и геологический факультеты	80 %
Биологический и почвоведения факультеты	85 %

Если учесть то, что, как правило, каждый вариант состоит из 5-6 задач, то в общем массиве задач вступительных экзаменов задания с параметром составляют 15-20% от указанных данных. Кроме всего прочего, варианты вступительных вариантов непременно содержат задачи, в которых параметры появляются в процессе решения — тригонометрические уравнения, неравенства, системы и тому подобное. Лишь в малом числе случаев в этих задачах необходимо найти решение, а не исследовать его.

Другими словами, задания с параметром, в среднем, составляют явно более 20% общего числа заданий на вступительных экзаменах в МГУ.

Аналогичная статистика наблюдается в вариантах вступительных экзаменов по математике в другие ведущие ВУЗы: МФТИ — как минимум 2 задачи из 6 задач, содержащихся в варианте, МИФИ — одна задача с параметрами и, кроме того, геометрическая задача, традиционно содержащая исследовательскую часть, сопряженную с рассмотрением полученного результата как функции некоторого параметра. Вариант вступительного экзамена по математике в МГПИУ на любом факультете, кроме, может быть, ФНП, обязательно содержит одну задачу с параметрами.

Вообще практически на любом вступительном экзамене, проверяющем математическую подготовку на достаточно высоком уровне, задания на такую тему имеются. Более того, именно наличие в экзаменационном варианте задачи с параметром является своего рода знаком того, что в данном учебном заведении к преподаванию математики по конкретной учебной специальности относятся весьма серьезно.

В этой связи необходимо отметить присутствие задач с параметрами в вариантах Единого государственного экзамена по математике, проводимого в Российской Федерации начиная с 2002 учебного года. Среди задач группы «С» одна задача — это задача с параметрами. При этом именно эта задача входит в балл, определяющий не только тестовую, но и аттестационную отметку выпускника. Кроме того, вариант обычно включает тригонометрическое уравнение, требующее проведения анализа полученного решения. Таким образом, получение отличной отметки при различных формах проведения экзамена по математике без решения задач с параметрами становится неразрешимой проблемой.

С другой стороны, положение задач с параметрами в конкретных учебно-методических комплексах по математике, утвержденных или рекомендованных к использованию в общеобразовательной школе Министерством образования и науки РФ, мягко говоря, совсем не столь значимо. Количество задач с параметрами в любом из общефедеральных комплексов не превосходит 1%. Также следует отметить, что ни в одном из общефедеральных комплексов учебников по математике, в том числе и для углубленного изучения, нет систематического обращения к этим задачам.

Большинство авторов учебников Федерального комплекта сознательно по указанным выше причинам ограничивают круг задач с параметрами рассмотрением некоторых частных их видов, обычно связанных с исследованием некоторых свойств линейной функции, квадратного трехчлена и не более того. Даже, казалось бы, в самой «благоприятной» для этого теме — тригонометрии, задачи с параметрами попросту игнорируются. Поэтому запись общего решения тригонометрического уравнения вида

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1$$

для большинства школьников выглядит, как некое магическое заклинание.

Сложилась парадоксальная ситуация. Существуют как бы три отдельных «математики»: школьная математика (ШМ), высшая математика вузов (ВМ) и некоторая «отдельная» часть математики — «абитуриентская» математика (АМ) [34]. Взаимоотношения этих частей можно изобразить в виде следующей системы (рис 9.).



Рис. 9

Стрелками показаны не связи, а влияние этих частей друг на друга. Так, «школьная» математика оказывает самое непосредственное

влияние на содержательную часть АМ, в меньшей мере — на методы решения, еще в меньшей мере на понятийную часть. «Высшая» математика, напротив, основное влияние оказывает именно на методический аппарат АМ, меньшее — на содержательную часть, и никакой на понятийную часть.

Но самое удивительное следующее — АМ есть вещь сама по себе. Уникальная, с богатыми традициями часть математики остается почти невостребованной «школьной» математикой. И это несмотря на огромное количество самых разнообразных задач, прекрасных идей и методов, используемых ею. Если отсутствие влияния ШМ и АМ на ВМ понятно, то отсутствие какого-то ни было влияния АМ на ШМ ставит определенные вопросы.

Разумеется, отождествлять цели преподавания математики в основной и старшей школе с целями успешной сдачи вступительных экзаменов было бы неправильно. Целью обучения в школе вряд ли следует считать только дальнейшее поступление в университеты и вузы. Однако столь разительные различия (более 10%, с одной стороны, и менее 1%, с другой стороны) гоже не представляются естественным положением дел.

Вообще из-за этого отношение к задачам с параметрами как к некоей сложной, почти неразрешимой проблеме господствует не только среди учащихся (что естественно), не только среди учителей (что удручает), но и среди ведущих методистов-математиков.

Как отметил один остроумный учитель, задачи бывают стандартные, нестандартные и с параметрами. Как заметил не менее остроумный ученик, задачи с параметрами отличаются от задач без параметра наличием одного.

Еще 40 лет тому назад в книге «Пособие по математике для поступающих в вузы» [34] было сказано: «Очень серьезные трудности вызывают обычно уравнения, неравенства и системы уравнений или неравенств с параметрами, в которых требуется найти такие значения этих параметров, при которых выполняются некоторые требования. Например, такие значения, при которых уравнение имеет единственное решение, или, наоборот, уравнению удовлетворяют все допустимые значения x , или всякое решение одной системы уравнений является решением другой системы, или всякое решение одного неравенства является решением другого неравенства и т.п.

Эти задачи являются, пожалуй, наиболее трудными из предлагаемых на экзаменах задач, и именно потому, что они требуют логической куль-

туры — т.е. того, чего не хватает большинству поступающих. Чтобы решить такую задачу, необходимо в каждый момент представлять себе, что уже сделано и что еще предстоит сделать, что означают уже полученные результаты». Прошло более сорока лет, а «воз и ныне там».

А.Г. Мордкович оценивает задачи с параметрами как «один из труднейших разделов школьного курса математики, в котором, кроме использования определенных алгоритмов решения уравнений и неравенств, приходится обдумывать, по какому признаку нужно разбить множество значений параметра на классы, следить за тем, чтобы не пропустить какие-либо тонкости» [81].

Г.В. Дорофеев обращал внимание на необходимость разработки методов обучения учащихся решению задач с параметрами и указывал, что «решение уравнений и неравенств с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применимых в исследованиях и на любом другом математическом материале» [25].

В.К. Марков, характеризуя задачи с параметрами как «миниатюрные исследовательские задачи, требующие обширных знаний из различных разделов школьной программы», отмечает, что «решение таких задач требует от абитуриентов высокой логической культуры и высокой техники исследования» [68].

С.А. Тынянкин также подчеркивает, что «задачи с параметрами являются наиболее сложным в логическом и техническом плане разделом элементарной математики. В очень сильном смысле эти задачи есть индикатор общего владения абитуриентом техникой и логикой математики» [120].

Мы считаем, что трудности в решении задач с параметрами связаны не столько с их технической сложностью, сколько с отсутствием ясного понимания многоуровневости таких задач. Например, в обычном уравнении «с x » следует просто найти его корни, следуя алгоритму решения, и на этом уровне решение заканчивается. А в уравнении с параметром следует перейти на более высокий уровень: надо еще на корни уравнения «посмотреть», т.е. понять, как они изменяются при изменении данных задачи и, далее, определить, какими должны быть эти числовые данные, чтобы корни уравнения в итоге удовлетворяли тому или иному условию. Поэтому формирующаяся в школе привычка решить уравнение и на этом поставить точку, и вообще, присутствие в подавляющем числе уравнений и неравенств только одной переменной, сразу же переводит задачи с параметром в ранг трудных.

4.2. Методологический анализ

На первоначальном этапе исследования формирования содержательно-методической линии задач с параметрами в ныне существующем курсе школьной математики представлялось нам чисто практической проблемой, решение которой предполагалось искать в виде органичного «вкрапления» этих задач в уже существующие учебные процессы. При этом предполагалось, что содержательно-методическая линия задач с параметрами уже «виртуально» существует и ее формальное отсутствие продиктовано «местными» факторами, присущими тому или иному УМК по математике. Тем более, что в любом УМК в той или иной (но везде в очень малой) степени задачи с параметрами встречаются.

Также предполагалось, что задачи с параметрами будут в основном, может быть с небольшими изменениями, использовать и обобщать понятийный и содержательный аппарат ныне существующих содержательно-методических линий курса математики — линии уравнений и неравенств, функциональной линии.

Однако в процессе попытки реализации соответствующих установок быстро выяснилось, что данный путь — путь экстенсивный, ведущий к перегрузке учебного процесса дополнительными заданиями, и, как следствие, к увеличению нагрузки на учащихся, «отторжению» предложенных изменений. Кроме того, было установлено, что регулярное, но «точечное» использование задач с параметрами в рамках существующих УМК также невозможно, опять-таки из-за отсутствия соответствующего методического аппарата.

Далее было установлено, что регулярное использование задач с параметрами радикально меняет цели изучения математики в курсе школы, изложенные в «Программе по математике» [98]. В «требованиях к математической подготовке учащихся», относящихся к разделу «Уравнения и неравенства» для основной школы, сказано: «В результате изучения курса математики учащиеся должны:

- понимать, что уравнения — это математический аппарат (?) решения разнообразных задач из математики, смежных областей знаний, практики;
- правильно употреблять термины «уравнение», «неравенство», «система», «корень уравнения», «решение системы», понимать их в тексте, в речи учителя (?), понимать формулировку «решить уравнение, неравенство, систему»;

- решать линейные, квадратные уравнения и простейшие рациональные уравнения, сводящиеся к ним, системы уравнений с двумя переменными (линейные и системы, в которых одно уравнение второй степени);
- решать линейные неравенства с одной переменной и их системы;
- решать текстовые задачи с помощью составления уравнений.

В «требованиях по математической подготовке учащихся», предъявляемых в старшей школе, говорится: «В результате изучения курса математики учащиеся должны:

- решать иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения;
- решать системы уравнений с двумя неизвестными;
- решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства;
- иметь представление о графическом способе решения уравнений и неравенств».

В свете «требований по математической подготовке учащихся» становится ясно, что почти полное отсутствие задач с параметрами в различных УМК по математике есть естественная реализация этих «требований». В результате их выполнения формируется мышление чисто эмпирического типа, направленное на поиск конкретного ответа в частном конкретном уравнении, в частной конкретной задаче. Кроме того, «требования» есть прямое проявление уравновешивающей обратной связи, действующей в современном учебном процессе и направленной на устранение разницы между действительным и желаемым уровнем изучения математики. Однако изменение системы в этом случае происходит в сторону уменьшения желаемых достижений учащихся, а не в сторону увеличения их уровня знаний. В «требованиях» ничего не сказано об умении учащихся проводить какой-либо анализ условий задачи, уравнения или полученного ответа. Поэтому знание, приобретаемое учащимися, это сумма отдельных знаний, умений и навыков, что характерно для опять-таки эмпирического типа мышления и что, естественно, никак не может вырабатывать исследовательские навыки, характерные для творческого типа мышления.

Приведем с сокращениями для сравнения «Требования к поступающему» в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова («Справочник для поступающих в Московский университет». М., — Изд-во Московского университета, 2005 г. Стр. 136–137).

«На экзамене по математике поступающий должен уметь:...

3) решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;

4) исследовать функции, строить графики функций и множества на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;

5) изображать геометрические фигуры на чертеже, делать дополнительные построения, строить сечения, исследовать взаимное расположение фигур;

12) анализировать формулировки утверждений и их доказательства».

В различии подходов к оценке умения — умения находить решение и умения анализировать полученное решение — кроется наиболее острое противоречие между существующими требованиями к математической подготовке учащихся.

Для выяснения причин, приведших к нынешнему положению, надо обратиться к ретроспективному рассмотрению изменения отношения к изучению математики.

В преамбуле к программам по математике для средней школы 1918 года было написано: «Курс математики строится и проводится в своей программе-минимум не столько в интересах будущих математиков или будущих техников, химиков, статистиков и т. п., сколько в целях пополнения тех недостающих звеньев в системе гуманитарного образования, понимая последнее в широком смысле слова, какие может дать только математика». Большим достижением довоенного среднего образования в нашей стране было создание единой средней школы, выпускник которой получал знания, обеспечивающие ему возможность поступления и обучения в высшем учебном заведении любого профиля: университете, вузе, медицинском, экономическом или каком-либо ином высшем учебном заведении.

Конечно, следует отдавать себе отчет в том, что «такого высокого уровня среднего образования удавалось достичь в условиях, когда оно далеко не было всеобщим и когда профессия учителя была весьма престижной» [61].

Вплоть до 1939 года для преподавания математики в школе было характерно большее, по сравнению с современным, разнообразие представленных в учебниках задач, направленных на реализацию цели — научить школьников решать любые естественно-научные задачи, связанные с курсом элементарной математики. В 1938 году учебник А.П. Киселева «Алгебра» [47] — после переработки, выполненной из-

вестным педагогом и методистом А.Н. Барсуковым — был официально утвержден стабильным и единственным учебником по алгебре для средней школы. Разнообразие задач, представленных в учебнике, поражает. Рассматриваются не только привычные для нынешнего времени «типовые задачи», но и задачи, связанные с физикой, биологией, например, задача о радиоактивном распаде, задача о двух источниках света и т.д.

Среди задач, представленных в учебнике (заметьте, что учебник для всех общеобразовательных школ!) содержатся, конечно, и задачи с параметрами, хотя самого термина в его нынешнем понимании тогда еще не существовало. Достаточно привести пример. Глава 8 носит название «Исследование уравнений», и в ней, по сути, проводится исследование линейного уравнения с двумя параметрами, квадратного уравнения с параметрами, систем линейных и нелинейных уравнений с параметрами [47]. Помимо учебников А.П. Киселева можно привести примеры учебников алгебры для средней школы под редакцией академика А.И. Маркушевича, в которых исследованию уравнений и неравенств, а проще — обучению решению задач с параметрами, отводилось достойное место.

Однако, как отмечается в книге [49], «достигнуть цели — обучить школьников решать любые задачи, связанные с курсом математики — не удалось. Поэтому в послевоенное время возникла и закрепилась противоположная точка зрения, согласно которой в школьном обучении математике следует представить только задачи определенных типов, обучение решению которых является одной из целей обучения математике вообще. И хотя отдельные методисты ратовали за параллельное рассмотрение как типовых, так и «нетиповых» задач, в практике школьного обучения закрепилась тенденция к обучению школьников решению строго определенных типов математических задач (особенно сильная на начальной стадии обучения)». Таким образом, к середине 60-х годов прошлого столетия произошло разделение задач на стандартные и «нестандартные», к которым, естественно, были отнесены задачи на исследование уравнений, неравенств, т.е. задачи с параметрами, задачи на построение в геометрии, бином Ньютона, комплексные числа и т.д.

Однако, как далее отмечает Ю.М. Колягин [49], «обучение школьников решению типовых задач в массовой школе не давало нужных результатов. В результате в качестве основной цели обучения

была выбрана цель наиболее быстрого и наиболее легкого решения задач определенных типов, разучивание со школьниками определенных способов решения этих задач. Не говоря уже о том, что стремление всячески облегчить математическую деятельность учащихся способствовало формированию у многих учителей и учащихся неверного убеждения в том, что основной целью работы над учебной задачей является наиболее быстрое и легкое ее решение». Таким образом, для устранения различия между желаемым уровнем умения решения задач и действительным положением дел был выбран путь уменьшения желаемого уровня, вместо увеличения действительного уровня знаний. Наметившийся в начале 60-х годов разрыв между уровнем подготовки выпускников школы и потребностями вузов постепенно углублялся по мере развития науки и технологии, а также в результате изменений в самом обществе и требованиях, предъявляемых им к уровню и содержанию образования и, в то же время, не желающим за это платить. В эти годы среднее обучение в школе становится бесплатным, общедоступным. Как следствие, получение среднего образования перестало считаться достижением, и уровень подготовки выпускников стал заметно понижаться.

Естественно, выведение из практики большого количества материала не могло не сопровождаться уменьшением времени, отводимого на изучение математики. Рассуждения «методистов» ясны: если 6 часов хватало на изучение большего количества материала, то изучение меньшего его количества требует, «естественно», меньшего времени. Механистический подход привел к тому, что вместо стандартных 6 часов изучения математики в неделю их количество на старшей ступени было уменьшено до 5, а в «гуманитарных» классах до 4 часов в неделю. При таком положении дел материал, считавшийся ранее общедоступным, перешел в разряд «углубленного» изучения, появились профильные классы и т.д. В практике преподавания математики восторжествовала алгоритмическая линия, основанная в основном на эмпирическом типе мышления, порождающая, в лучшем случае, хороших исполнителей.

Реформа образования, проводившаяся под руководством А.Н. Колмогорова, наряду с положительными моментами (введение векторного метода, элементов математического анализа и т.д.) имела и негативные последствия. Без учета существовавшего на тот момент уровня образования основной массы учительского состава была пред-

принята попытка приблизить уровень школьной математики хотя бы к уровню математики 19 века. «Не всегда продуманные и последовательные реформы в итоге нанесли больше вреда и способствовали углублению разрыва между желаемым уровнем знаний школьников и действительным уровнем их знаний. Это, естественно, вызвало реакцию системы образования, проявившуюся в еще более формальном подходе к изложению соответствующего материала и к еще более широкому исключению из курса задач, требовавших времени для решения» [77]. В начале 70-х годов прошлого столетия задачи с параметрами твердо перешли из разряда задач, являющихся обязательными, хотя бы в плане развития умения анализировать условие, в разряд «нестандартных», предлагаемых на вступительных экзаменах.

На данный момент, как отмечает Л.Д. Кудрявцев, «Разрыв между уровнем математической подготовки выпускников школы и потребностями вузов определяется многими причинами, среди которых мы выделим следующие:

- недостаточность и неоднородность математической подготовки абитуриентов;
- взаимная несогласованность школьной и вузовских программ по математике;
- недостаточная квалификация учителей и отсутствие удобной и доступной им системы повышения квалификации и переподготовки, в частности, в дистанционной форме;
- нежелание математических кафедр при составлении планов занятий учитывать уровень подготовки абитуриентов и устранять существующий разрыв;
- определенный «шантаж» вузов, выражающийся в том, что на вступительных экзаменах предлагаются искусственно усложненные задачи, а не те, которые действительно необходимы для успешного продолжения образования в вузе;
- увеличение количества студентов в связи с потребностью общества в массовом высшем образовании.

Существующая система довузовской подготовки (подготовительные отделения, курсы, лицеи и колледжи) не улучшает ситуацию, поскольку она готовит не к обучению в вузе, а лишь к вступительным экзаменам. Отсюда происходит и специфическая «фрепетиторская» идеология: нацеленность на решение сугубо конкретных, искусственно усложненных примеров и на применение так называемых «искус-

ственных» приемов вместо систематического изучения методов решения тщательно классифицированных задач.

Наиболее очевидной и существенной причиной разрыва является несогласованность школьной и вузовских программ по математике, присущие программам недостатки, а также отсутствие понимания того, что математика — единая наука и лишь условно может быть разделена на элементарную и высшую, школьную и вузовскую». Академик Кудрявцев прямо указывает на кризис системы современного математического образования, как школьного, так и вузовского. Нас в основном интересует школьная составляющая этого явления — как это базы. Как отмечается в сборнике «Новое содержание образования» [27], «сегодняшняя школа (а точнее, тот тип практики образования, который за три с лишним столетия сложился к концу XX века на основе идей Я.А. Коменского, а именно, «школа памяти») не решает и принципиально не может решать практические задачи сегодняшнего образования и воспитания, которые касаются выращивания мышления у подрастающего поколения».

4.3. Психологический анализ

Кроме перечисленных выше причин отсутствия задач с параметрами нужно еще указать и на психологические аспекты отрицательного отношения большинства рядовых преподавателей математики, а через их и отношение учащихся, к задачам с параметрами, задачам на построение, задачам на целые числа и т.п. «нестандартным» задачам.

Любую человеческую деятельность направляют глубоко укоренившиеся идеи, стратегии, руководящие идеи и способы понимания — так называемые «ментальные модели» [7] мышления. Они представляют собой общие, иногда плохо или вовсе неосознаваемые идеи, на основе которых формируются наши мысли и действия, а также представления о желаемых результатах. Эти теории, которыми мы руководствуемся, вырастают из наблюдений и непосредственных действий. Они были полезны нам в прошлом, и мы полагаем, что они же будут полезны нам в будущем. Но если теории не оправдываются, то мы «теряем веру» в них, и обычно уже навсегда. Ментальные модели — это нечто вроде фильтров, «встроенных» в наши органы чувств [7]. Ментальные модели, используемые людьми, часто представляют собой метафоры, которые, в силу их неочевидности и расплывчатости, трудно подвергнуть сомнению. Материалом для

создания ментальных моделей восприятия служат отчасти общественное мнение, отчасти идеи других людей, оказывающих на нас влияние. Все остальное мы получаем, конструируем и поддерживаем на основе собственного опыта. Построение ментальных моделей производится четырьмя основными способами.

1. Вычеркивание. Получать и обрабатывать всю поступающую к нам информацию мы не в силах. Поэтому мы выбираем ее некоторую часть, а оставшуюся игнорируем, «вычеркиваем» согласно собственному пониманию ее необходимости, оправдывая это тем, что данная информация для нас не важна. Если наши ментальные модели уже сформированы, то вычеркивание информации работает на их поддержание. Часто именно положительный опыт становится «вычеркнутым», воспринимаемым как должное, в то время как отрицательный — запоминается. Однако, в большинстве случаев, вместо анализа первопричин отрицательного результата (неудачи при решении задачи, неравенства и т.п.) и поиска методов устранения причин неудачи, делаются неправильные выводы о «трудности, недоступности» и т.п.

2. Конструирование. Конструирование — антитеза вычеркиванию. Обладая какой-либо информацией, мы пытаемся придать ей форму, укладывающуюся в рамки сформированных у нас ментальных моделей. Мы «достраиваем» недостающую информацию, если это необходимо для нас. В случае задач с параметрами мы сталкиваемся с удивительным проявлением упреждающей обратной связи: ожидание падения «успешности» усвоения курса, содержащего задачи с параметрами по сравнению с курсом, не содержащим их или подобных им, заранее обуславливает отрицательное отношение к этим задачам. Наиболее желаемый результат любой деятельности — успех и связанное с ним самоуважение. Формула английского психолога и философа У. Джеймса
$$\text{«самоуважение»} = \frac{\text{успех}}{\text{притязания}}$$
 отражает сущность успешной дея-

тельности, в частности и обучения, в том случае, если числитель этой дроби постоянно больше ее знаменателя. Уменьшение числителя ведет к уменьшению величины самоуважения. Человеку проще предположить отрицательный результат, т.е. уменьшить притязания, чтобы иметь возможность сказать «я ведь предупреждал...».

3. Искажение. Искажение — процесс изменения полученной информации — преувеличение одних ее деталей и приращение других.

При выборе того или иного действия мы придаем больший вес каким-то аспектам нашего опыта. В этом нет ничего плохого, но можно прийти к неправильным выводам.

Например, многие считают, что любые нерешенные задачи, конечно, можно решить, стоит того только захотеть. Для поддержания иллюзии они воспринимают свои неудачи как «почти удачи», забывая о том, что не существует «почти решенных» задач. Одним из принципов системного подхода в обучении должно стать убеждение в том, что «почти решенных задач» не бывает. Задачи или решены, или не решены.

4. Обобщение. Используя обобщение, мы можем создавать свои ментальные модели на основании единичного опыта. Обобщение играет ключевую роль в процессе обучения и применения знаний в различных ситуациях. Находя в предмете что-либо знакомое, мы сразу предполагаем, как с ним обращаться. Без умения обобщать нам приходилось бы каждую задачу «решать с нуля». Опасность обобщения таится в том, что, взяв за основу нехарактерный пример и делая на его основе обобщение, можно стать глухим и слепым ко всем свидетельствам обратного.

Именно такое обобщение делается большинством рядовых педагогов по отношению к задачам с параметрами или вообще задачам, тем или иным образом не укладывающимся в привычные ментальные модели — «рамки». Действительно, существующие на данный момент УМК по математике содержат задачи с параметрами в виде «го-чечных включений», что неизбежно приводит к появлению уверенности в их случайности, надуманности, ненужности. Если отдельно взятая задача с параметрами решается, то она решается методами, применяемыми и при решении задач без параметров. В результате отдельная решенная задача не даст новых идей или методов. С другой стороны, нерешенная задача, напротив, порождает негативный опыт, на основании которого укрепляется существующая ментальная модель. В итоге мы лучше всего видим то, что, как мы считаем, необходимо, и едва замечаем информацию, не укладывающуюся в рамки наших ментальных моделей.

Присущие нам ментальные модели мышления образуют некую внутреннюю систему — парадигму мышления. Люди, обладающие различными парадигмами мышления, зачастую не склонны слушать и

понимать друг друга. Следует отметить, что каждая из сторон обычно имеет свое видение проблемы, свое отношение к ней. Требуется масса внимания для того, чтобы понять о чем именно говорит собеседник. Как было установлено исследователями, даже при передаче простой информации люди обычно не слышат того, что говорят другие. Мы слышим только то, что ожидаем услышать. Усугубляя проблему, люди часто не говорят всего того, что они имеют в виду. «Мы едва ли в силах представить себе, — писал О. Шпенглер, — сколько великих мыслей чужих культур нашли в нас свою погибель, поскольку мы, исходя из нашего мышления и его границ, не смогли их ассимилировать, или, что то же, ощущали их ложными, ненужными, бессмысленными» [134].

Приведенные наблюдения в целом объясняют малое присутствие, а точнее почти полное отсутствие задач с параметрами, и не только их, в курсе школы и заставляют обратиться к анализу учебного процесса с целью нахождения возможности его изменения в нужном направлении.

Выводы

1. Отсутствие содержательно-методической линии задач с параметрами в существующей ныне системе математического школьного образования вызвано как методическими, так и психологическими причинами.

2. Существующая ныне система математического образования носит конформистский характер: будучи основана на страхе «неприятия» обществом, она порождает нежелание учащихся проявлять инициативу. Обучение превращается в рутинную работу, не приносящую ни удовлетворения, ни удовольствия.

3. Введение содержательно-методической линии задач с параметрами не есть самоцель, но инструмент для развития системного математического и логического мышления, причем не только учащихся, но и преподавателей.

4. Альтернативность идей и методов решения задач с параметрами станет основой для развития самостоятельности действия учащихся в различных областях, приведет к возможности изменения ментальных моделей мышления, появления новых моделей.

5. Система математического образования перестанет быть конформистской и педагогочентричной. Главную роль в обучении будет играть тот, кто обучается, т.е. учащийся, а не учитель. Целью станет совместное обучение учащегося и учителя, построенное на принципах обратной связи.

6. Реализация огромного творческого потенциала задач с параметрами будет способствовать развитию эстетического воспитания, что невозможно предложить при линейном алгоритмическом подходе, существующем ныне.

Глава 2. Методологический анализ содержательной методической линии «Задачи с параметрами»

§ 1. Задачи с параметрами как аналоги научно-исследовательских задач прикладной математики

Все возрастающая популярность задач с параметрами далеко не случайна. Теоретическое изучение и математическое моделирование многообразных процессов из различных областей науки и практической деятельности человека зачастую приводят к достаточно сложным уравнениям, неравенствам или их системам, содержащим параметры. Необходимой частью решения подобных задач является исследование характера и конечного результата процесса в зависимости от значений параметров, причем часто оказывается, что решение зависит не от каждого параметра в отдельности, а от некоторого их характерного комплекса. В подобных случаях становится невозможным разбиение исходной задачи со многими параметрами на совокупность задач с одним из параметров. Такие задачи требуют глубокого понимания сути процесса, свободного владения различными математическими методами и скрупулезного анализа [83]. Можно сказать, что задачи с параметрами являются упрощенным прообразом важных научно-исследовательских задач. Задачи с параметрами чрезвычайно многообразны: задачи на исследование квадратичной функции и систем линейных уравнений, задачи на делимость многочленов, задачи на минимум и максимум, геометрические задачи с параметрами, так называемые «логические» задачи и т.д. Нельзя отрицать того, что для успешного решения задач с параметрами часто требуется, говоря словами известного немецкого математика и популяризатора науки Ф. Клейна, «хотя и не слишком изощренное, но все-таки трюкачество».

С точки зрения высшей математики любая задача с параметрами может рассматриваться как задача на исследование функций как минимум двух переменных: независимого аргумента и параметра. При-

чем, как это происходит даже в простейших случаях, когда решение может зависеть не от каждого параметра в отдельности. Например, исследование решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными приводит к исследованию изменения величин (определителей системы), каждый из которых зависит от четырех, в общем случае никак не связанных между собой параметров. Задачи подобного типа требуют глубокого понимания сути условия, свободного владения разнообразными методами исследований и анализа.

Рассмотрим, например, совершенно «стандартную» задачу об изменении числа корней квадратного уравнения $3x^2 - 5x + c = 0$ при «пробегании» параметром всех действительных значений. Любой десятиклассник, не говоря уже об учащемся старшей школы, вычислив дискриминант, найдет, при каких значениях параметра уравнение не имеет корней, при каких значениях уравнению удовлетворяет единственное значение переменной, а при каких — два различных значения. Однако эта стандартная задача есть отражение одного из важнейших современных понятий — бифуркации — качественного изменения поведения системы в процессе изменения ее параметров. Этим понятием оперируют сегодня все — естествоиспытатели, инженеры, специалисты гуманитарных наук.

Мы считаем, что наиболее уместно понятие бифуркации вводить и анализировать в школьном курсе математики в процессе решения задач с параметрами. Ибо здесь даже ничего особо нового вводить или добавлять не потребуется — хорошо и давно известные примеры бифуркаций в изобилии можно найти как в алгебре, так и в геометрии. Изменение формы сечения куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали, при продвижении плоскости от одной вершины куба до другой — это тоже бифуркационный процесс. Вообще, как будет показано ниже, нахождение общего решения уравнения или неравенства с параметром или параметрами может рассматриваться как исследование некоторого бифуркационного процесса.

Еще одним из новых понятий современной математики является понятие фрактала. Это удивительное понятие математики оказалось средством адекватного отображения природных явлений (роста кристаллов, прохождения пузырьков воздуха через нефть, образования трещин и других) и описания объектов (включая, в частности, человеческий организм).

Простейшая задача, приводящая к появлению этого понятия — задача о нахождении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (платок Серпинского).

Трудно себе представить современную экономику, не использующую математику. Основы математической теории решения экономических задач входят в курс средней школы. Задачи оптимального выбора все чаще встречаются на экзаменах.

Приведем пример задачи, взятой из книги «Математика абитуриенту» [117].

Пример 1.1. На 100 рублей решено купить слочных игрушек. Они продаются наборами. Набор из 20 игрушек стоит 4 рубля, набор из 35 игрушек — 6 рублей, набор из 50 игрушек — 9 рублей. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее число игрушек? Записывая формализованные условия, получим:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 100, \\ 20x_1 + 35x_2 + 50x_3 = N. \end{cases}$$

Следует ответить на вопрос — каково наибольшее натуральное значение параметра N , при котором данная система имеет целочисленное решение.

Но можно представить это условие и так:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 100, \\ 20x_1 + 35x_2 + 50x_3 \Rightarrow \max. \end{cases}$$

И тогда видно, что мы имеем дело с простейшей задачей линейного программирования.

Еще один пример задачи, предлагавшейся абитуриентам экономического факультета МГУ им. Ломоносова в 1994 году и представляющей некоторую модель реальности.

Пример 1.2. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left| 90 - \frac{40500}{n} \right|$ тысяч рублей, а цена реализации каж-

дого телевизора не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ тысяч рублей. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая в данных условиях прибыль.

Данная задача является простейшим примером задач на оптимизацию, что характерно для любой экономической системы. Приведем решение этой задачи, имеющей любопытные выводы.

Решение. Средние издержки производства, т.е. расходы предприятия на изготовление одного телевизора, заданы. Следовательно, можно составить функцию полных издержек:

$$C(n) = 40500 + 270n - \left| 40500 - 90n \right| = \begin{cases} 360n, & 1 \leq n < 450 \\ 81000 + 180n, & n \geq 450 \end{cases}$$

Построим график этой функции.

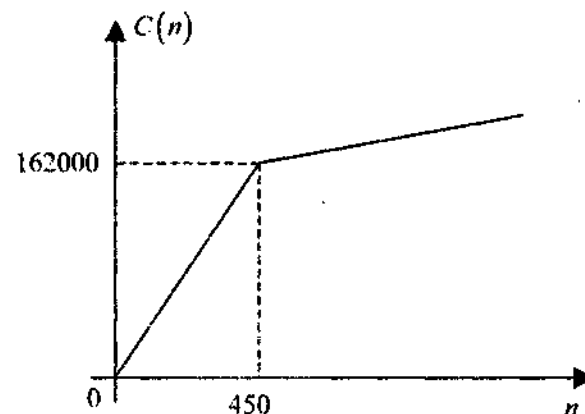


Рис. 10

Заметим, что заданная в условии функция полных издержек производства отражает факт снижения суммарных издержек при увеличении объема производства. Действительно, при выпуске менее

450 телевизоров в месяц издержки равны 360 тысячам рублей и 180 тысячам рублей при выпуске более 450 телевизоров в месяц. Найдём теперь возможную прибыль (в данном случае — зависимость прибыли от количества изготовленных и проданных телевизоров). Так как цена реализации каждого телевизора не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ тысяч рублей, то возможная прибыль не превосходит величины, равной

$$P(n) = \left(540 - \frac{3}{10}n\right) \cdot n - C(n) = \begin{cases} -0,3n^2 + 540n - 360n, & n < 450 \\ -0,3n^2 + 540n - (81000 + 180n), & n \geq 450 \end{cases}$$

Приводя подобные члены и выделив полный квадрат, получим, что

$$P(n) = \begin{cases} 27000 - 0,3(n - 300)^2, & n < 450 \\ 27000 - 0,3(n - 600)^2, & n \geq 450 \end{cases}$$

Построим график.

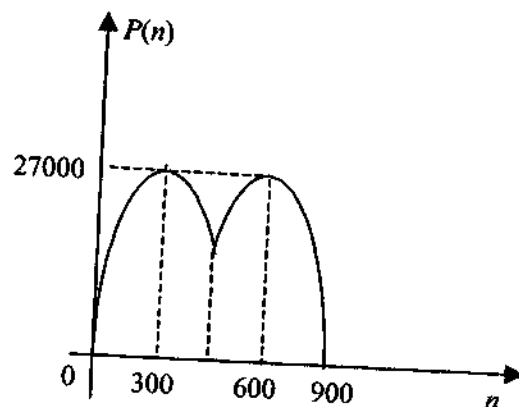


Рис. 11

Как видно, максимально возможное значение прибыли, равное 27000 тыс. рублей, достигается при выпуске как 300 телевизоров в месяц, так и при выпуске 600 телевизоров в месяц. Причем при выпуске более 900 телевизоров в день производство становится нерентабельным.

Однако при выборе окончательного реального ответа на вопрос, поставленный в условии задачи, необходимо учитывать следующее: большему объёму производства соответствует снижение цен на рынке и увеличение занятости населения. С другой стороны, производство и сбыт меньшего количества продукции организовать легче, но это ведёт к уменьшению занятости. Как видим, в этой задаче затрагивается проблема применения обоснования конкретных управленческих решений.

Математический анализ. Обратимся к традиционному, идущему от классиков, определению сходящейся числовой последовательности — одному из фундаментальных определений курса высшей математики. Последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ называют сходящейся к числу a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Очевидно, что это определение равносильно следующему: последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ называют сходящейся к числу a если для любого значения параметра $p > 0$ множество решений неравенства $|x_n - a| < p$ относительно переменной n , принимающей натуральные значения, содержит множество вида $\{N, N+1, N+2, \dots\}$. То есть для любого положительного значения параметра среди решений соответствующего неравенства должны содержаться все натуральные числа, за исключением какого-то конечного их числа.

Согласно определению проверка того факта, что некоторое число является пределом числовой последовательности, предписывает ученику такой порядок действий:

- решить относительно n неравенство $|x_n - a| < p$ с параметром p ;
- проверить, имеются ли среди всех решений неравенства все натуральные n из некоторого промежутка вида $(N_0; +\infty)$.

Понятие производной и первообразной функции является в настоящее время одним из вопросов, входящих в стандарт образования. Производную применяют при исследовании простейших колебательных процессов.

В динамике популяций много примеров, когда изменение численности носит колебательный характер. Простейшая динамическая модель системы «хищник — жертва» описывается системой дифферен-

циальных уравнений, задающих обратную связь между численностью их популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x \\ \dot{y} = (cx - d)y \end{cases}, \text{ где } x, y \text{ — соответственно численности жертв}$$

(овец) и хищников (волков). Скорость $\dot{x}$ пропорциональна x , но коэффициент пропорциональности $(a - by)$ тем меньше, чем больше волков. И наоборот, коэффициент $(cx - d)$ роста популяции хищников тем больше, чем больше популяция овец.

Модель в значительной степени условна и приближительна, но она отражает реальные эффекты. Анализ показывает, что решения системы имеют колебательный характер, система движется по замкнутым кривым типа эллипсов (Рис. 12).

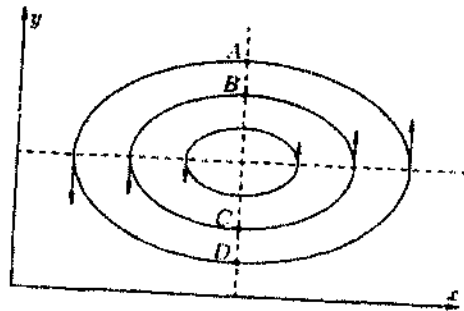


Рис. 12

На практике такого сорта колебания действительно имеют место. Далее, представим, что в точке A производится отстрел волков и система перепрыгивает в точку B . Дальнейшее движение будет происходить по эллипсу меньшего размера, что интуитивно ожидаемо. Теперь уменьшим численность волков в точке C . Система перейдет в D и будет двигаться по большему эллипсу. Амплитуда колебаний увеличится. Это уже противоречит интуиции, но практика подтверждает такого рода метаморфозы. Выбор момента отстрела, оказывается, существенно влияет на поведение системы.

Серьезное уточнение рассмотренной модели едва ли целесообразно. Попытки все измерить и разложить по полочкам показывают, что биология — не физика. Популяции — это не планеты, которые миллионы лет придерживаются своих орбит. Тут все «дышит» и реагирует на мелочи. Система постоянно перестраивается. Коэффициенты дрей-

фуют быстрее, чем обрабатывается статистика. Поэтому «измерить и подсчитать» — это неправильно поставленная цель. Физика, конечно, великая наука, но ее идеологический опыт не везде годится для подражания. Более того, сама физика все чаще сталкивается с проблемами нового типа, где точные предсказания принципиально невозможны.

И снова обратимся к экономике. В 60-х годах прошлого века в Московской области проводились масштабные мелиоративные мероприятия, целью которых было осушение торфяных болот. При этом представлялось, что будет получено дешевое топливо, которое сэкономит расходы как государства, так и граждан. Так и произошло, однако из-за развития сети автодорог в ранее труднодоступных районах изменилась структура экосистемы Подмосквы, начались лесные пожары. Убытки от пожаров сравнимы с полученной экономией. В последнее время рассматривается вариант заболачивания ранее осушенных территорий.

Аналитическая геометрия. Исследование поведения квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ является важнейшим разделом в курсе математики школы. Квадратный трехчлен, по сути, представляет собой чуть ли не единственную (кроме линейной функции), зато почти идеальную модель отработки многих методов решения задач с параметрами, и, кроме того, раздел элементарной математики, ясное понимание которого необходимо при изучении курса высшей математики. Приведем следующий пример.

Пример 1.3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$.

Данная задача, по своей сути, есть задача определения вида кривой второго порядка, задаваемой при каждом конкретном значении параметра уравнением. Общий вид уравнения кривой второго порядка на плоскости $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, которое в зависимости от значений параметров может задавать окружность, эллипс, гиперболу, пару прямых — пересекающихся, параллельных или совпадающих, точку или пустое множество. Так из условия задачи следует, что нас будут интересовать такие значения параметра, при которых данное уравнение будет задавать точку.

§ 2. Вопросы классификации задач с параметрами и методов их решения

2.1. Систематизация задач с параметрами

Задачи с параметрами образуют широкое множество, в котором, однако, можно выделить однородные участки. Существует много критериев, по которым можно попытаться систематизировать эти задачи. Например, Ф. Клейн предложил следующую систематизацию, приведенную в книге «Элементарная математика с точки зрения учителей» [48].

1. Уравнение, содержащее один параметр.
2. Уравнение с двумя параметрами.
3. Уравнение с тремя параметрами.

Д. Пойа писал, что классификация задач может оказаться полезной при решении, поскольку «хорошая классификация предполагает разделение задач таким образом, что сам тип проблемной ситуации предопределяет метод решения» [94].

Ю.М. Колягин [49] предлагает подходить к вопросу классификации задач по сложности в зависимости от числа компонентов, являющихся неизвестными и придающими ситуации проблемный характер. В его классификации выделяются четыре типа задач (проблемных ситуаций): стандартные задачи, обучающие задачи, поисковые задачи и проблемные задачи.

Исходя из данного им определения соответствующих типов, задачи с параметрами относятся к поисковым задачам, в которых заданы исходные данные и поставлена цель решения. Однако, как и в других случаях, классификация носит вневременной характер.

Для исследования мы вполне можем обойтись несколькими систематизирующими признаками: по заданию, по теме, по методу и по сложности.

1. «По заданию» или «по постановке» задачи с параметрами можно разделить следующим образом:

- 1) задачи, начинающиеся условием «решить» или «решите».

В соответствии с постановкой условия, задание «решить задачу с параметрами» можно сформулировать следующим образом: решить задачу с параметрами — это значит: указав область допустимых значений параметров, найти все ее общие решения на соответствующих областях допустимых значений параметров,

указав и те допустимые значения параметров, при которых задача решений не имеет, провести классификацию совокупности всех частных видов решений данной задачи.

Следует отметить, что данная формулировка не может считаться полной, т.к. существует огромный класс задач, в которых отсутствует условие определения вида решений, а наличествует, например, определение количества решений, соответствий между решениями и т.д. Обычно эти задачи относят ко второму классу.

- 2) задачи, начинающиеся с условия «найти» или «найдите».

Условие «найти или найдите» чаще всего означает, что нужно отыскать какие-либо множества особых значений параметров, отвечающих условию задачи и совсем необязательно, а чаще всего и не нужно, отыскивать сами решения, тем более что зачастую это и невозможно. Характерным признаком подобных задач является указание дополнительного свойства решения задачи, их количества, свойств ограниченности и т.д. Например, «найдите все значения параметра, при каждом из которых задача имеет единственное решение, два различных решения, не имеет решения» и т.д. Однако привычка «решать» задачи приводит к тому, что в ряде случаев учащиеся ищут в процессе решения совсем не то, что требуется по условию задачи.

Конечно, провести четкую границу между задачами разных типов не просто. Изменением формулировки условия часто можно перевести задачу из одного типа в другой.

Задачи, начинающиеся условием «решите или решите», чисто рефлекторно вызывают у учащихся «эффект узнавания» и кажутся менее «страшными». Обучающую и развивающую роль этих задач трудно переоценить, через них в первую очередь происходит приобретение и взаимодействие различных методов решения. Для нас важна еще одна особенность задач с условием «решите»: для большинства из них можно предложить некую весьма общую схему решения, схему поиска решения (что важнее), методику обучения этому поиску и некоторые формальные признаки, по которым можно оценивать уровень сложности этих задач. Образно говоря, задачи с условием «решите» лучше поддаются методической обработке, и именно их чаще всего выбирают в качестве основного типа учебных задач. Это, конечно, не означает, что задачи других типов из учебного процесса исключаются. Тем более

что зачастую задачи, начинающиеся условием «решите», требуют гораздо больше труда и внимательности учащихся.

2. Классификация задач по теме носит чисто учебный характер. Набор тем, входящих в программу школьного курса, достаточно традиционен.

- 1) Линейное уравнение и линейная функция.
- 2) Квадратное уравнение и квадратичная функция.
- 3) Многочлены. Целые уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 4) Дробно-рациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 5) Иррациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 6) Показательные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 7) Логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 8) Тригонометрические уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 9) Смешанные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.
- 10) Производные элементарных функций и их применение.
- 11) Сюжетные задачи
- 12) Геометрические задачи.

Под геометрическими задачами мы имеем в виду такие задачи курса геометрии, в процессе решения которых приходится проводить исследование полученных результатов как функций какого-либо параметра.

Заметим, что разбиение задач по темам носит, в основном, приблизительный характер, так как после проведения некоторых преобразований решение задачи обычно сводится к решению алгебраических уравнений, неравенств степени не выше второй или их систем или совокупностей, что обуславливает их выделение как фундаментальных исследований. В меньшей мере данное замечание может быть отнесено к решению тригонометрических уравнений и неравенств из-за специфического свойства периодичности, присущего тригонометрическим функциям.

3. Классификация по методу решения также носит учебный характер. Особенность здесь состоит в том, что задача классифицирует-

ся вместе с методом ее решения. Такой подход правомерен для задач чисто учебного уровня, в которых предлагаемый метод или очевидно единствен, или явно предпочтительнее других. Методы бывают общие и частные, алгебраические и геометрические. Это самая общая классификация методов решения.

На наш взгляд, педагогически неверно давать задачу с требованием решить ее именно таким способом, если возможен иной, более короткий и красивый и не очень замаскированный способ ее решения. Приведем следующий пример. В «Требованиях по математической подготовке» [98] сказано, что учащиеся должны уметь решать задачи «на движение» методом составления уравнений и их систем. Однако большое число подобных задач могут быть решены методом, использующим привлечение графика равномерного движения, т.е. построением графиков линейных функций. Поэтому будет неверным считать единственно возможным методом, приведенный в «Требованиях».

4. Теперь переходим к проблеме классификации задач по сложности. Первый уровень традиционно обычно составляют так называемые «элементарные» (репродуктивные) задачи, имеющие решения, опирающиеся на «элементарные» алгоритмы, применяемые для решения задач без параметров, так называемые «элементарные» задачи. «Элементарные» задачи составляют подавляющее большинство задач, предлагаемых в учебниках по математике.

Второй уровень — «базовые» или «опорные» задачи. «Дело в том, что умение решать задачи во многом зависит от знания достаточного количества фактов и теорем, в большинстве своем не содержащихся в учебнике, от знакомства с некоторыми частными приемами, о которых трудно догадаться самостоятельно». Появление принципиально новых задач — явление достаточно редкое, обычно задачи являются комбинацией известных фактов и решаются известными приемами. Вот эти факты и приемы могут быть введены через систему базовых задач. Задачи второго уровня сложности иллюстрируют определенный прием решения, причем эта иллюстрация должна быть очень ясной и не содержать посторонних примесей. «Задачу-метод надо запомнить вместе с решением. Как показывает практика, количество опорных задач, нужных хорошему ученику, вовсе не так велико, как это может показаться. Всего за время обучения ему вполне достаточно накопить несколько десятков опорных задач. Повышение уровня математической подготовки школьника требует и увеличения числа

опорных задач, входящих в его арсенал»[130]. В частности, к «базовым» задачам нужно будет отнести задачи, связанные, например, с существованием корней квадратного трехчлена, их взаимным отношением, расположением корней на числовой прямой и т.п. задачи.

Третий уровень — так называемые творческие или «нестандартные» задачи, опирающиеся на идеи и методы, представленные в первых двух уровнях, а также собственные теоретические находки учащегося. Решение творческих задач — исследовательский процесс, требующий проведения анализа условия представленной задачи, выделения идей, лежащих в основе этого условия, разложения условия на подзадачи, составления плана решения и, наконец, реализации этого плана. Именно творческие задачи являются моделями действительных научно-исследовательских задач, с которыми, вполне возможно, учащимся предстоит встретиться в дальнейшем.

Разбисние задач на три уровня сложности традиционно для подавляющего числа задачников. Причем такому разбиснию подвергаются не только задачи с параметрами, но и любые другие.

Следует, однако, отметить следующее.

1. Сложность той или иной задачи имеет смысл только относительно субъективного опыта человека или людей, решающих ее.

2. «Элементарные» (репродуктивные) и творческие задачи отличаются только по отношению к решателю.

Суть противопоставления состоит в том, что для «элементарных» задач существуют доступные решателю их готовые методы или алгоритмы решения, ведущие к правильному ответу. В случае творческих или «нестандартных» задач эти методы отсутствуют или неизвестны решателю (что чаще всего встречается в процессе обучения).

Таким образом, мы постулируем следующее.

Каждая задача, решаемая впервые, это творческая задача. Не имеет никакой принципиальной разницы в том, какова ее действительная сложность в процессе обучения.

Сложность любой задачи может быть оценена только во времени. Так называемые «элементарные задачи» в процессе накопления умений и методов решения переходят из разряда творческих задач сначала в разряд учебных или опорных. Затем с течением времени некоторые из них, такие, как, например, задача решения линейного или квадратного уравнения с постоянными коэффициентами, переходят в разряд учебных действий.

«Стандартность» или «нестандартность» задачи определяется количеством усилий, затраченных на отыскание путей ее решения. Но как только найден такой путь, «нестандартность» задачи исчезает.

2.2. Некоторые методы решения задач с параметрами

Перейдем теперь к систематизации методов решения задач с параметрами. На наш взгляд, в основе любой математической задачи лежат свойства какой-либо функции или каких-либо функций, входящих в условие.

Среди методов решения задач с параметрами обычно выделяют следующие:

1. Аналитический метод.
2. Функциональный метод.
3. Графический метод.
4. Метод замены.
5. Метод изменения ролей переменных.
6. Метод перехода от общего к частному.
7. Метод свободных ассоциаций.
8. Метод «обратного хода».
9. Комбинированные методы.

Приведенные методы, конечно, не исчерпывают все множество методов решения задач с параметрами, однако являются наиболее употребительными и часто используемыми.

Аналитический метод является не только самостоятельным методом решения задач, но и обязательной составной частью всех остальных методов. Основной частью аналитического метода решения задач является метод эквивалентных или равносильных преобразований. Предлагаемый подход к решению уравнений и неравенств с параметрами, их систем или совокупностей основан на замене одного математического высказывания другим равносильным математическим высказыванием. Задача рассматривается как некоторое логическое высказывание, область истинности которого предстоит установить в результате его рассмотрения. При этом исходное условие рядом равносильных преобразований или преобразований-следствий приводится к совокупности простейших логических утверждений, истинность или ложность которых считается установленной.

В аналитическом методе решения задач чаще всего используется прием дробления — разделение условия задачи на совокупность более простых условий. Так, условие задачи, содержащее выражения, стоящее под знаками модуля, обычно разделяют на совокупность более простых условий, не содержащих модуль.

Функциональный метод решения задач с параметрами

Функциональный метод решения задач с параметрами является составной частью и естественным развитием функциональной линии обучения математике. Можно выделить свойства функций, наиболее часто используемые при решении задач. Во-первых, конечно, кусочная монотонность большинства алгебраических и элементарных трансцендентных функций, во-вторых, свойства четности и нечетности, периодичность функций, в-третьих, свойства ограниченности области определения или области значения функции. В случае неявного задания функции используются свойства симметрии графика соответствия относительно осей координат или начала координат и т.д. Наиболее часто при решении задач этим методом применяются методы математического анализа: использование непрерывности, дифференцируемости, монотонности, устанавливаемой с помощью тех же методов.

Графический метод решения задач с параметрами

Как было уже сказано, любая задача с параметрами есть задача как минимум с двумя переменными — аргументом и параметром. Следовательно, решение задачи — упорядоченный набор их значений, может рассматриваться как координаты точки некоторого евклидова пространства. В частности, непустое уравнение относительно одной переменной с одним параметром задает на плоскости некоторую линию, неравенство относительно одной переменной и одним параметром — некоторые области координатной плоскости. Уравнение относительно двух переменных и одним параметром задает некоторую поверхность в пространстве, неравенство — соответствующие области пространства. Координатно-графический метод представляет искомые решения в виде геометрического места точек на координатной плоскости, где в качестве одной из координат выступает параметр, а в качестве другой — искомая переменная. Решение задачи в

этом случае рассматривается как значение координаты, соответствующей искомой переменной, принадлежащей линии или области, задаваемой условием.

Метод замены

Метод замены заключается в формулировке исходного условия задачи в терминах новых переменных, существенно упрощающих процесс решения. Чаще всего метод замены используется при решении тригонометрических уравнений или неравенств. Он позволяет сводить их к алгебраическим уравнениям и неравенствам, анализ которых не в пример проще. Однако существуют алгебраические задачи, решение которых становится более простым после получения их тригонометрического эквивалента.

Метод изменения ролей переменных

Достаточно часто бывает необходимым поменять роли искомой переменной и одного из параметров, чтобы, по крайней мере, получить возможность проведения анализа представленного условия. Достаточно часто бывает, что степень искомой переменной гораздо выше, чем степень входящего в условие параметра. Изменение ролей в этом случае приводит к реальному упрощению процесса решения.

Метод перехода от общего к частному

Если какое-либо утверждение в условии задачи справедливо при всех значениях переменной или при всех значениях параметров, то для успешного продвижения в решении бывает достаточно найти «удобное» значение этой переменной или параметра, для которого искомое решение задачи будет являться следствием.

Метод свободных ассоциаций

Метод свободных ассоциаций основан на представлении условия задачи в терминах других областей математики, существенно упрощающих условие, дающих адекватное понимание. Результативность творческой деятельности, особенно на этапе генерирования новых идей, существенно повышается, если широко использовать все новые и новые ассоциации, которые в итоге порождают по-настоящему про-

дуктивные идеи решения проблемы. В процессе зарождения ассоциаций устанавливаются неординарные взаимосвязи между компонентами решаемой проблемы и элементами внешнего мира, включая компоненты прежнего опыта творческой деятельности лица, участвующего в решении проблемы, творческой задачи. В результате процесса зарождения новых ассоциативных связей и возникают творческие идеи решения проблемы. Часто используют прием аналогии — поиск аналога и использование всех процедур решения по аналогии, использование результатов аналогичных задач как некоторой базы для решения данной задачи. Редко какая задача не имеет аналогов. А. Пуанкаре предлагал очень интересную схему математического творчества (Рис. 13). Он связывал его с делением человеческой психики на сознательную и бессознательную части.

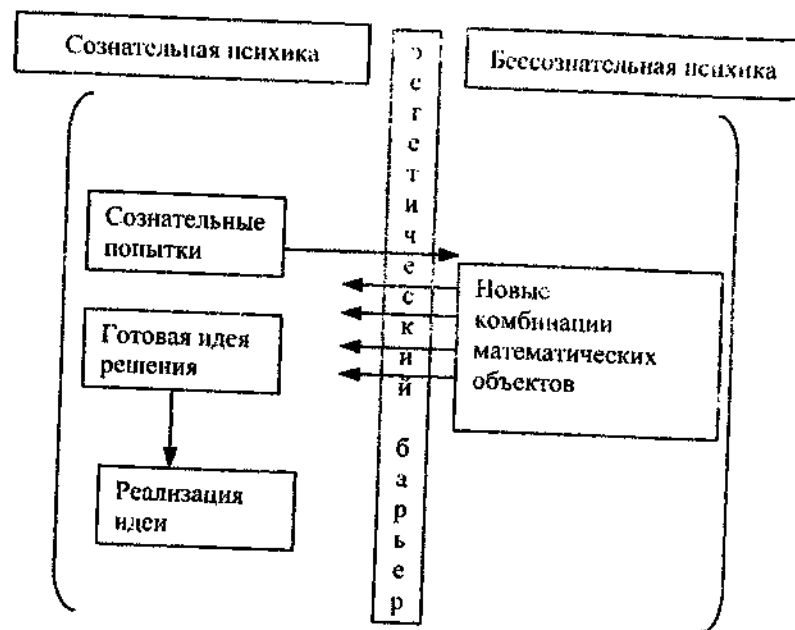


Рис. 13

Процесс начинается с сознательных усилий, направленных на решение некоторой проблемы. Эти усилия повышают активность бессознательной части психики. Там появляется множество новых комбинаций математических объектов — как бы возможных фрагментов решения. Они появляются в громадном количестве и с колоссальной

скоростью. Но подавляющая часть этих комбинаций не достигает сознания, только небольшая их часть рассматривается сознанием. Чтобы достигнуть сознания, они проходят отбор, основанный на некоем эстетическом принципе. Некий эстетический барьер позволяет лишь малой их части проникнуть в сознание. Они появляются там как готовая идея решения, причем это сопровождается очень сильным субъективным чувством уверенности в правильности идеи [132].

Некто подобное высказывал и Д. Поля [94,95], сравнивая поиск решения с брожением в тумане и внезапным озарением.

Метод обратного хода

Недостаток условий, выражающийся в том, что уравнений или неравенств меньше количества неизвестных, иногда можно преодолеть, предположив, что какая-либо часть решения, чаще всего искомого значения параметра, найдена.

Комбинированные методы основаны, как правило, на особых свойствах той или иной функции и присущи решению только данной конкретной задачи.

§ 3. Методы декомпозиции алгебраических и трансцендентных уравнений и неравенств

3.1. Некоторые определения

Основной операцией анализа является представление целого в виде составных частей. Всякая задача, предложенная в процессе обучения для решения учащимся, является некоторым математическим произведением, композицией условий, составленной автором. В результате анализа условия задачи разбиваются на подзадачи, системы — на подсистемы, или составляющие их соответствия. Поэтому процесс решения можно рассматривать как декомпозицию соответствующего условия [77].

Пусть $F(x, y, z, \dots)$ и $G(x, y, z, \dots)$ — функции, рассматриваемые совместно в общей части областей их определения (эта общая часть предполагается непустой). Уравнением называется равенство $F(x, y, z, \dots) = G(x, y, z, \dots)$, выражающее следующее суждение: значение функции $F(x, y, z, \dots)$ равно значению функции $G(x, y, z, \dots)$.

Общая часть областей определения функций $F(x, y, z, \dots)$ и $G(x, y, z, \dots)$ называется областью определения уравнения $F(x, y, z, \dots) = G(x, y, z, \dots)$.

Упорядоченный набор чисел $(x_0, y_0, z_0, \dots)$, обращающий уравнение в верное числовое равенство, называется решением уравнения. Решить уравнение — это значит найти множество его решений или доказать, что в рассматриваемом множестве их нет. Уравнения и неравенства, рассматриваемые в элементарной математике, классифицируются по характеру математических операций, выполняемых над переменными.

Уравнение $F(x, y, z, \dots) = G(x, y, z, \dots)$ называется целым алгебраическим, или, кратко, алгебраическим, если $F(x, y, z, \dots)$ и $G(x, y, z, \dots)$ — многочлены. Аналогично дается определение целого алгебраического неравенства.

Уравнение называется дробным (дробным алгебраическим или дробно-рациональным), если $F(x, y, z, \dots)$ и $G(x, y, z, \dots)$ есть отношение многочленов.

Уравнение называется иррациональным, если $F(x, y, z, \dots)$ и $G(x, y, z, \dots)$ являются алгебраическими выражениями или функциями и хотя бы одна из них содержит действие извлечение корня из выражения от неизвестных.

Уравнение называется трансцендентным, если хотя бы одна из его частей не является алгебраическим выражением.

Два высказывания $A(x, y, \dots, a, b, \dots)$ и $B(x, y, \dots, a, b, \dots)$ будем называть равносильными и обозначать знаком равносильности $A(x, y, \dots, a, b, \dots) \Leftrightarrow B(x, y, \dots, a, b, \dots)$, если множества их истинности совпадают. В частности, два уравнения $F(x) = G(x)$ и $F_1(x) = G_1(x)$ называются равносильными, если множества их решений совпадают. В этом случае переход от первого уравнения ко второму записывается так $F(x) = G(x) \Leftrightarrow F_1(x) = G_1(x)$. Из определения следует, что уравнения, не имеющие решений, равносильны. Замена уравнения равносильным ему или замена уравнения ему равносильной совокупностью уравнений (неравенств, систем) называется равносильным переходом или равносильным преобразованием.

Сформулируем основные теоремы о равносильных преобразованиях.

- Уравнение остается равносильным исходному уравнению при переносе слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением знака этого слагаемого на противоположный.
- Уравнение остается равносильным исходному уравнению при прибавлении к обеим частям одного и того же числа.
- Уравнение остается равносильным исходному уравнению при умножении обеих частей уравнения на положительное число.

Если требуется решить набор уравнений, причем искомое значение переменной должно удовлетворять хотя бы одному из них, то говорят, что надо решить совокупность уравнений.

$$\text{Совокупность уравнений записывается так } \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ F_2(x) = 0 \\ \dots \\ F_n(x) = 0 \end{cases}$$

Решением совокупности уравнений является значение переменной, удовлетворяющее хотя бы одному уравнению совокупности.

Две совокупности уравнений называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой и наоборот.

Если требуется решить набор уравнений, причем искомое значение переменной должно удовлетворять каждому из них, то говорят, что надо решить систему уравнений.

$$\text{Система уравнений записывается так } \begin{cases} F_1(x) = 0, \\ F_2(x) = 0, \\ \dots \\ F_n(x) = 0 \end{cases}$$

Решением системы уравнений является значение переменной, удовлетворяющее всем уравнениям системы. Две системы уравнений называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой и наоборот.

Концепция равносильности высказываний позволяет сформулировать алгоритмы решения уравнений и неравенств в виде логических схем. Понятие равносильности позволяет также формулировать зада-

чи, условие которых есть отрицание исходного высказывания. Если $A(x)$ — логическое высказывание, а $\neg A(x)$ его отрицание, то правила логического отрицания записываются следующим образом:

- 1) $\neg(\forall x \in X : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X : \neg A(x))$
- 2) $\neg(\exists x \in X : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X : \neg A(x))$.

Это позволяет применять прием инверсии — изменение процедур деятельности на противоположные, обращение функций, взгляд на систему с противоположной точки зрения, нежели общепринятая, замена прямого условия задачи противоположным условием, чего практически не бывает при использовании прямых линейных алгоритмов.

Например, вместо решения задачи, содержащей условие «найдите все значения параметра, при каждом из которых условие задачи верно хотя бы для одного значения переменной» можно рассматривать отрицание условия, заключающееся в том, что «будут найдены все допустимые значения параметра, при которых задача решений не имеет». Дополнение найденного множества во всем множестве допустимых значений параметров составит искомое множество.

3.2. Методы декомпозиции простейших уравнений

Основной операцией анализа является представление целого в виде составных частей. Всякая задача, предложенная в процессе обучения для решения учащимся, является некоторым математическим произведением, композицией условий, составленной автором. В результате анализа условия задача разбивается на подзадачи, системы — на подсистемы, или составляющие их соответствия. Поэтому процесс решения можно рассматривать как декомпозицию соответствующего условия [77].

Любое преобразование исходного условия обычно направлено на упрощение этого условия при соблюдении равносильности проводимых преобразований. Поэтому результатом решения любого уравнения или неравенства является определение совокупности его решений, представимое в виде объединения дискретных значений переменной или элементарных подмножеств числовой прямой.

Теоремой, на которой базируется данное утверждение, является основная теорема алгебры, в части, относящейся к решению алгебраического уравнения над полем действительных чисел.

Т е о р е м а. Любой многочлен произвольной натуральной степени с действительными коэффициентами может быть разложен на произведение некоторого количества линейных множителей и (или) некоторого количества квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом.

Пусть дан многочлен степени n с действительными коэффициентами $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$.

Тогда

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)(x^2 + b_1x + c_1) \dots (x^2 + b_mx + c_m),$$

где $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$, $k + 2m = n$.

Поэтому целое уравнение степени n относительно данной переменной с действительными коэффициентами имеет ровно n действительных корней или на четное число меньше.

Это имеет непосредственное отношение к рассматриваемым нами задачам с параметрами. Даже в самых простых из них можно, например, встретить такие формулировки: «Найдите все значения параметра, при каждом из которых квадратное уравнение имеет один корень», или «найдите все значения параметра, при каждом из которых кубический многочлен имеет два корня» и т.п. В этой связи мы считаем правильным утверждение о том, что квадратный трехчлен с дискриминантом, равным нулю, имеет два корня (или один корень, но кратности два), однако уравнению будет удовлетворять единственное значение переменной, и задачу с условием, сформулированным следующим образом: «найдите все значения параметра, при каждом из которых квадратное уравнение имеет единственное решение», мы будем считать корректной, в указанном выше смысле. Поэтому мы считаем, что указывать корни уравнения или многочлена надо обязательно, учитывая их кратности. Таким образом:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0, \\ b^2 - 4ac = 0, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{2a}, \\ x = -\frac{b}{2a}. \end{cases}$$

Заметим, что кратность корня многочлена оказывает непосредственное влияние на решение соответствующего неравенства вида $P_n(x) \vee 0$, где знак сравнения $\vee$ — это один из знаков $>, \geq, <, \leq, \neq$.

1. Таким образом, основной декомпозиционный метод решения целого уравнения — сведение уравнения к равносильной совокупности простейших равенств $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, \\ \dots, 1 \leq k \leq n, P(x_k) = 0, \\ x = x_k \end{cases}$

или к доказательству неравенства $P_n(x) \neq 0, \forall x$.

2. Следующий шаг — решение рационального уравнения вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$. Данное уравнение равносильно системе

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x) = 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Решением системы является совокупность корней многочлена, стоящего в числителе, и не входящих в совокупность корней многочлена, стоящего в знаменателе.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, \\ Q(x_1) \neq 0 \\ \dots \\ x = x_k, \\ Q(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

3. Простейшим иррациональным уравнением, содержащим радикал четной степени, называется уравнение вида $\sqrt[n]{F(x)} = G(x), n \in N$, где $y = F(x)$ и $y = G(x)$ — некоторые элементарные функции.

$$\sqrt[n]{F(x)} = G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \geq 0, \\ F(x) = G^2(x) \end{cases}$$

Обоснование равносильности данного перехода мы дадим вместе с обоснованием равносильности перехода в соответствующем неравенстве.

4. Простейшим иррациональным уравнением, содержащим радикал нечетной степени, называется уравнение вида $\sqrt[n]{F(x)} = G(x), n \in N$, где $y = F(x)$ и $y = G(x)$ — некоторые элементарные функции. $\sqrt[n]{F(x)} = G(x) \Leftrightarrow F(x) = G^{2n-1}(x)$.

5. Простейшим уравнением, содержащим выражение, стоящее под знаком модуля, называется уравнение вида $|F(x)| = G(x)$, декомпо-

зицию которого можно провести двумя способами, приводящими уравнение к равносильной ему системе или совокупности систем.

$$1) \quad |F(x)| = G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \geq 0, \\ F^2(x) = G^2(x) \end{cases}$$

$$2) \quad |F(x)| = G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) \geq 0, \\ F(x) = G(x), \\ F(x) < 0, \\ -F(x) = G(x) \end{cases}$$

Простейшим показательным уравнением с постоянным положительным основанием $a > 0, a \neq 1$ называется уравнение вида $a^{F(x)} = a^{G(x)}$. Данное уравнение $a^{F(x)} = a^{G(x)} \Leftrightarrow F(x) = G(x)$.

Простейшим логарифмическим уравнением с постоянным основанием $a > 0, a \neq 1$ называется уравнение вида $\log_a F(x) = \log_a G(x)$.

Данное уравнение

$$\log_a F(x) = \log_a G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) > 0, \\ F(x) = G(x) \end{cases} \text{ или}$$

$$\log_a F(x) = \log_a G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} G(x) > 0, \\ F(x) = G(x) \end{cases}$$

При решении задач учащиеся довольно часто используют знаки математической логики: различные символы, скобки, знаки следования, равносильности и др. Как справедливо отмечает А.В. Жуков [39], «несмотря на миниатюрность, эти знаки несут в себе колоссальную логическую нагрузку. Поэтому небрежность в обращении с ними чревата последствиями, сравнимыми с последствиями от небрежного обращения с тонким инструментом хирурга». Использование понятий конъюнкции ($\wedge$), дизъюнкции ($\vee$), импликации ($\Rightarrow$) и двойной импликации ($\Leftrightarrow$), кванторов общности ($\forall$), существования ($\exists$) — неотъемлемая часть задач содержательно-методической линии задач с параметрами.

3.3. Методы декомпозиции некоторых неравенств

Естественным желанием при решении неравенства является желание привести решение того или иного неравенства повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Основным методом решения любого неравенства является теорема, называемая «методом интервалов» решения неравенства. Основным свойством любой элементарной функции, рассматриваемой в курсе школьной математики, является свойство непрерывности функции на области своего определения.

Т е о р е м а. Всякое аналитическое выражение $F(x)$ может менять свой знак только в точках, в которых оно обращается в ноль, или в точках, в которых график данного аналитического выражения терпит разрыв.

1. Целым неравенством называется неравенство вида $P_n(x) \vee 0$, где знак сравнения $\vee$ обозначает один из четырех знаков сравнения $>, \geq, <, \leq$. Решением неравенства является совокупность промежутков числовой оси, определяемых методом интервалов. Концом или концами промежутков являются корни многочлена. Каноническим видом произвольного неравенства назовем неравенство, представленное в виде $\frac{u_1(x)u_2(x) \dots u_n(x)}{v_1(x)v_2(x) \dots v_k(x)} \vee 0$.

Заметим следующее: при решении подобных неравенств нас интересует только знак значения соответствующего множителя, а не его абсолютная величина. Поэтому, если по каким-либо причинам нам нелегко работать с данным множителем, то мы можем заменить его другим, имеющим те же интервалы знакопостоянства, что и данный множитель.

Важно отметить, что методы декомпозиции осуществляются только при приведении исходного неравенства к каноническому виду.

Основная часть методов декомпозиции неравенств обусловлена следующими утверждениями.

Т е о р е м а. Функция $y = f(x)$ является монотонно возрастающей на области своего определения тогда и только тогда, когда для любых двух значений аргументов t_1 и t_2 из области определения разность значений функции $f(t_1) - f(t_2)$ имеет тот же знак, что и разность соответствующих значений аргументов $t_1 - t_2$.

Данная теорема в курсе школы нашла отражение в определении функции, возрастающей на каком-либо множестве: функция называется возрастающей на каком-либо множестве, если для любых двух значений аргумента функции, принадлежащих этому множеству, большему значению аргумента соответствует большее значение функции. (См., например, [79,80]).

Утверждение 1.

$$(f(x) \uparrow \uparrow) \Leftrightarrow ((\forall t_1 \in D(f), (\forall t_2 \in D(f))) : (f(t_1) - f(t_2) \vee 0) \Leftrightarrow (t_1 - t_2 \vee 0))$$

Т е о р е м а. Функция $y = f(x)$ является монотонно убывающей на области своего определения тогда и только тогда, когда для любых двух значений аргументов t_1 и t_2 из области определения разность значений функции $f(t_1) - f(t_2)$ имеет знак, противоположный знаку разности соответствующих значений аргументов $t_1 - t_2$.

Утверждение 2.

$$(f(x) \downarrow \downarrow) \Leftrightarrow ((\forall t_1 \in D(f), (\forall t_2 \in D(f))) : (f(t_1) - f(t_2) \vee 0) \Leftrightarrow (t_2 - t_1 \vee 0))$$

Из утверждений получаются методы декомпозиции практически любых множителей, на которые раскладываются аналитические выражения, представимые при помощи элементарных функций, за исключением, может быть множителей, принимающих значения одного знака. Поэтому, при условии неизменности знака решаемого неравенства множители, принимающие положительные значения, можно просто исключить, а множители, принимающие отрицательные значения — заменить на (-1) .

Наиболее часто в качестве подобного множителя в рассматриваемых нами задачах с параметрами встречается квадратный трехчлен вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ с отрицательным дискриминантом. Заметим, что в этом случае знак принимаемых им значений совпадает

со знаком первого коэффициента a . Но иногда можно заменить подобный трехчлен его свободным членом $c = f(0)$.

Действительно,

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0)(f(x) > 0 \forall x) \Leftrightarrow (D < 0) \wedge ((a > 0) \vee (c > 0)).$$

При условии отрицательности дискриминанта график квадратного трехчлена расположен в одной полуплоскости относительно оси абсцисс при всех допустимых значениях параметров. Следовательно, если квадратный трехчлен принимает положительные значения, то его старший коэффициент — также положителен, но положительно и его значение в нуле.

Аналогично:

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0)(f(x) < 0 \forall x) \Leftrightarrow (D < 0) \wedge ((a < 0) \vee (c < 0)).$$

2. Функция $y = x^n$, $n \in N$. Степенная функция с натуральным показателем является монотонно возрастающей на множестве неотрицательных чисел. Свойство монотонности, как мы увидим и далее, помимо непрерывности, будет являться основным свойством, определяющим декомпозицию соответствующего множителя. Поэтому сравнение $(t_1^n - t_2^n \vee 0) \Leftrightarrow (t_1 - t_2 \vee 0)$, $(\forall t_1 \geq 0), (\forall t_2 \geq 0), (\forall n \in N)$. При нечетном показателе степени $(t_1^{2n-1} - t_2^{2n-1} \vee 0) \Leftrightarrow (t_1 - t_2 \vee 0)$, $(\forall n \in N)$

3. Как следствие предыдущего, получаем, что

$$(|t_1| - |t_2| \vee 0) \Leftrightarrow (t_1^2 - t_2^2 \vee 0).$$

4. Используя монотонное возрастание степенной функции на множестве неотрицательных чисел, имеем:

$$(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \vee 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \geq 0, \\ t_2 \geq 0, \\ t_1 - t_2 \vee 0 \end{cases}.$$

5. Показательная функция $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ также монотонна. Если основание больше единицы, то функция монотонно возрастает, если же основание положительно, но меньше единицы, то функция

монотонно убывает. Однако разбиение на отдельные случаи при решении неравенств необязательно: $(a^x - a^y \vee 0) \Leftrightarrow ((a-1)(x-y) \vee 0)$.

6. Логарифмическая функция, являясь обратной к показательной функции, при тех же значениях основания монотонна в том же смысле. То есть если основание больше единицы, то функция монотонно возрастает, если же основание положительно, но меньше единицы, то функция монотонно убывает. Однако и в этом случае разбиение на

$$\text{отдельные случаи необязательно: } (\log_a x - \log_a y \vee 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \\ \frac{(x-y)}{(a-1)} \vee 0 \end{cases}.$$

$$\text{Как следствие, имеем } (\log_a x \vee 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{(x-1)}{(a-1)} \vee 0. \end{cases}$$

3.4. Некоторые частные методы декомпозиции

Свойства монотонности показательной и логарифмической функции позволяют достаточно эффективно сводить сложные неравенства к гораздо более простым неравенствам.

Например:

$$1) \begin{cases} a^{f(x)} \vee b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(f(x) - \log_a b)}{(a-1)} \vee 0.$$

$$2) \log_a f(x) \vee b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ \frac{(f(x) - a^b)}{(a-1)} \vee 0. \end{cases}$$

$$3) \log_a f(x) + \log_a g(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \frac{(f(x)g(x) - 1)}{(a-1)} \vee 0 \end{cases}.$$

$$4) \frac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{a^{h(x)} - a^{\varphi(x)}} > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x)}{h(x) - \varphi(x)} > 0.$$

$$5) |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$6) |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

§ 4. Основные понятия задач с параметрами

Часто неясность предмета рассуждения становится проблемной мыслительной ситуацией. Если то или иное понятие четко не определено, то неизбежно возникает непонимание. «Нельзя внести точность в рассуждения, если она сначала не введена в понятие», — справедливо утверждал английский астроном Джон Фредерик Уильям Гершель.

Неясность предмета рассуждения возникает обычно в следующих случаях:

Во-первых, когда мы не понимаем какие-либо термины. Французский философ Рене Декарт мечтательно заметил, что если бы удалось четко установить значения всех терминов и понятий, то можно было бы избавить человечество от большинства заблуждений.

Во-вторых, когда одно и то же понятие разные книги, словари и разные авторитеты определяют различно. «Нет ничего более запутанного, чем понятие о понятии».

Именно таким образом обстоит дело с понятием «параметр». В теории решения задач система понятий должна быть сформулирована с учетом общематематических и психолого-педагогических требований. В математическом аспекте разработка понятий должна осуществляться на основе фундаментальных математических понятий и методов, как естественное расширение и углубление школьной системы математических понятий.

В «Толковом словаре русского языка» [119] приводится следующее толкование данного понятия: «Параметр 1. Величина, входящая в математическую формулу и сохраняющая постоянное значение в пределах одного явления или для данной частной задачи, но при переходе к другому явлению, к другой частной задаче меняющая свое значение (мат)...»

Общаясь с задачами с параметрами, учащиеся убеждаются, что авторы учебных пособий свободно трактуют это понятие. Приведем несколько определений, данных в различных пособиях и различными авторами.

4.1. Определение понятия «параметр» и «задача с параметрами» в пособиях

Определение понятия «параметр» и «задача с параметрами» большинства современных справочных и учебно-методических пособий восходят к определениям, данным С.И. Новоселовым. В «Специальном курсе элементарной алгебры» [89] приведено определение, которое стало традиционным для большинства последующих изданий.

«Рассмотрим некоторое аналитическое выражение, содержащее две группы аргументов. Будем для определенности обозначать аргументы одной группы последними буквами латинского алфавита, например, $x, y, \dots, z$ и называть их по-прежнему аргументами, а аргументы второй группы обозначать первыми буквами алфавита, например, $a, b, \dots, c$ и называть их параметрами».

В «Толковом словаре математических терминов» [118] сказано: «Параметр — величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но которое в другой задаче меняет свои значения».

Моденов П.С., Новоселов С.И. [78]: «Если в уравнение кроме известных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами».

В пособии Г.А. Ястребинецкого [140] говорится: «Рассмотрим уравнение $f(a, b, c, \dots, x) = \varphi(a, b, c, \dots, x)$, где $a, b, c, \dots, x$ — переменные величины. Переменные $a, b, c, \dots$, которые при решении уравнения считаются постоянными, называются параметрами».

В.И. Голубев [22] дает следующее определение: «Параметром называется независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным».

Особенность переменных, названных параметрами, отмечалась авторами некоторых других пособий. Так в книге «Задачи с параметрами» [25], сказано: «...параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет обращаться с параметром как

с числом, а во-вторых, степень свободы общения ограничивается его неизвестностью».

Следует отметить, что авторы подавляющего большинства пособий по математике не считают нужным даже пытаться дать определение параметра или задачи с параметрами, оставляя это, как видно, на долю школьных учителей.

Чисто формальное разделение переменных на неизвестные и параметры по признаку обозначения со временем перешло из пособий для поступающих в вузы в школьные учебники. Подобный подход к введению понятия параметра на примерах вообще характерен для современных учебников. Почти во всех учебно-методических комплектах на той или иной стадии обучения понятие «параметр» вводится, однако, в большинстве учебников этим, по сути, и ограничивается.

4.2. Определение понятия «параметр» в учебно-методических комплектах по математике

Заметим сразу, что определение понятия «параметр» и соответственно задач с параметрами в большинстве УМК по математике дается «постфактум» или как бы между делом. Наиболее рано вводит термин параметр А.Г. Мордкович.

1. Мордкович А.Г. [79]. «Пример 7. Решить уравнение $x^2 - (2p+1)x + (p^2 + p - 2) = 0$.

Решение. Это квадратное уравнение отличается от всех рассмотренных до сих пор тем, что в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами (курсив наш) или уравнениями с параметрами. В данном случае параметр (буква) p входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения».

2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. [68]
«Решим уравнения: $8x = 7$, $15x = 7$, $-11x = 7$, $0x = 7$.

Рассматривая уравнение $ax = 7$, мы придавали буквам a и x разный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a — некоторое фиксированное число, значение которого в каждом конкретном случае известно. В таких случаях говорят, что a является параметром, а уравнение называют уравнением с параметром».

3. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. [14].

«Обычно в уравнении или неравенстве буквами обозначают неизвестные. Решить уравнение (неравенство) — значит найти множество значений неизвестных, удовлетворяющих этому уравнению (неравенству). Иногда уравнения (неравенства), кроме букв, обозначающих неизвестные, содержат другие буквы, называемые параметрами. Тогда мы имеем дело не с одним, а с бесконечным множеством уравнений (неравенств). При этом бывает, что при одних значениях параметров уравнение не имеет корней, при других — имеет только один корень, при третьих — два корня».

4. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. [87].

«Задачи с параметрами нередки в школьном курсе математики. Так, например, задача решить (относительно x) квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, является примером задачи с тремя параметрами a, b, c . В этом случае говорят, что надо решить уравнение с параметрами a, b, c .

Задача решить (относительно x) линейное неравенство общего вида $ax + b > 0$ является примером задачи с двумя параметрами a и b . В этом случае говорят, что надо решить неравенство с параметрами a и b .

Задача решить относительно x и y систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ является примером задачи с одним параметром a . В этом

случае говорят, что надо решить систему уравнений с параметром a ».

Интуитивное, сиюминутное описание понятия «параметр» приводит к тому, что предлагаемые методы решения соответствующих задач также носят частный характер. Методические приемы решения задач с параметрами опираются на определения вида: «если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а буквами, то они (буквы) называются параметрами, а соответствующее уравнение или неравенство — параметрическим».

При этом:

- если нет точных определений термина «параметр», «задачи с параметрами» и других связанных с ними понятий, то невозможно проведение исследований, устанавливающих связь этих задач с основными математическими понятиями;

- закрепление (на уровне условного рефлекса) за неизвестными одних и тех же символов, а за параметрами других символов, приводит к тому, что эти несущественные признаки становятся доминирующими, превращая некоторые достаточно простые задачи в задачи чуть ли неразрешимые.

Приведем следующий пример, иллюстрирующий неправомерность такого закрепления.

Большинство учащихся, например, успешно справятся с задачей разложения на множители выражения $x^2 + 3x + 2$, и гораздо меньшее их число справится с разложением на множители выражения $2y^2 + 3yx + x^2$.

- отсутствие методической базы решения подобных задач приводит к тому, что каждое уравнение или неравенство с параметрами превращается в задачу, вызывающую у большинства учащихся и учителей «как минимум робость» (Г.В. Дорофеев в книге [25]).
- в процессе решения стандартных задач объектом внимания учащихся являются вычислительные процедуры, а не мыслительная деятельность, посредством которой осуществляется отбор и использование математических фактов.

Причина этого достаточно очевидна: основная стратегия математического образования в школе — это развитие умений и навыков решения определенного круга стандартных задач, в большинстве своем связанных с выполнением некоторых алгоритмов. Задачи с параметрами, напротив, относятся к тому классу задач, где эти алгоритмы либо вовсе отсутствуют, либо явно неприменимы. Эти задачи требуют, прежде всего, умения проводить — порой достаточно разветвленные — самостоятельные логические построения. Кроме того, арсенал стандартных методов решения требует существенного пополнения некоторыми специфическими методами. Именно это и вызывает «у большинства учащихся и учителей как минимум робость».

Для того чтобы преодолеть эти затруднения, необходимо всем используемым понятиям дать корректные определения.

Согласно «Философскому энциклопедическому словарю» [122] «понятие — это мысль, высказывание, отражающие общие существенные признаки объекта». Являются ли признаки понятия «параметр», высказанные в предыдущих определениях, существенными?

Рассмотрим, например, определение, приведенное в книге Новослонова С.И. [89], которое послужило основой определений большинства последующих изданий:

«Если в уравнение кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами».

Очевидно, что обозначение буквой не является существенным признаком такого понятия, как «параметр». Во-первых, существуют постоянные величины, которым также присвоено «имя собственное» — например: π , e , и т.д.

Во-вторых, отсутствие в задаче переменных кроме неизвестной, также не может служить признаком того, что данная задача — не задача с параметрами.

Например, в уравнениях $\sqrt{\sin x - 1} + \cos 4x = 1$, $\sin(2\pi \cos x) = 1$ и им подобным, как и в большинстве тригонометрических уравнений, параметры возникают в процессе решения.

4.3. Определение понятия «параметр»

В процессе решения любой математической задачи условие представляется в виде некоторого набора уравнений и (или) неравенств. Поэтому в дальнейшем под задачей с параметрами будем понимать либо уравнения, либо неравенства, либо их комбинации — системы, совокупности и т.д.

Например, уравнение с двумя переменными вида $f(x, y) = 0$ будем считать уравнением относительно переменной x с параметром y , если ставится условие решить это уравнение относительно переменной x , при каждом допустимом значении переменной y или указать некоторое множество значений переменной y , определяющее некоторое подмножество решений x , удовлетворяющих дополнительным условиям. И напротив, будем считать то же самое уравнение уравнением с двумя независимыми переменными, если поставлена задача найти пары значений переменных, удовлетворяющих данному уравнению.

Поясним на примерах необходимость каждого из существенных признаков понятия «параметр».

1. Независимость переменной, обозначенной термином «параметр», легко просматривается в большинстве соответствующих задач. Например, если поставлена задача «решить уравнение $x^2 + 1 = p$ от-

носителем переменной x с параметром p , то независимость переменной p состоит хотя бы в том, что она не обязана принимать значения не меньшие 1, в силу равенства величине, принимающей такие значения.

2. «Управляемость» решением задачи данной переменной заключается в том, мы должны ей каждый раз «подчиняться», каждый раз указывая ответ в зависимости от значений этой переменной. Например, в приведенном выше уравнении ответ записывается следующим образом:

- 1) Если $p < 1$, то уравнение решений не имеет.
- 2) Если $p = 1$, то уравнению удовлетворяет единственное значение переменной $x = 0$.
- 3) Если $p > 1$, то уравнению удовлетворяют два значения переменной $x = \sqrt{p-1}$ и $x = -\sqrt{p-1}$.

3. В подавляющем большинстве задач некоторая переменная, входящая в условие, явно «назначается» параметром. Таковы задачи, начинающиеся словами, такими как «Найдите все значения параметра...», или «Решите ... при всех значениях параметра...», в условиях которых явно указан идентификатор параметра. Но есть широкий класс задач, по своей сути параметрических, которые традиция к таковым не относит. Это тригонометрические задачи, задачи на нахождение минимума и максимума, нахождение области значений некоторых функций и т.д.

В этих задачах параметр появляется по ходу составления математической модели или по ходу решения задачи. Приведем совсем свежий пример подобной задачи. В олимпиаде МГУ «Покори Воробьевы горы» предлагалась следующая задача: «Существует ли такой прямоугольный треугольник, что увеличенные на 1 оба его катета и гипотенуза являются соответственно катетами и гипотенузой другого прямоугольного треугольника? Тот же вопрос, если все три стороны исходного треугольника не увеличивать, а изменять на 1, т.е. увеличивать или уменьшать — каждую по своему усмотрению». Решение задачи сводится к исследованию системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ ((x+1)^2 + (y+1)^2 = (z+1)^2. \end{cases}$$

А если быть совсем точным, следует установить, имеет ли эта система хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $0 < x \leq y < z$. Можно привести и «параметрическую» формулировку. Существует ли хотя одно положительное значение параметра, при котором данная система имеет положительные решения? Мы сознательно не указываем, какая из переменных должна быть выбрана в качестве параметра. Это еще раз подчеркивает не только независимость соответствующей переменной, но и независимость самого выбора этой переменной.

Появление параметра может быть обусловлено свойствами функций, входящих в условие. Например, уравнение $\sqrt{\sin x - 1} + \cos 4x = 1$ равносильными преобразованиями сводится к системе $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$, ко-

торая в свою очередь сводится к системе $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x = 2\pi n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$

с двумя целочисленными параметрами k и n , появляющимися из-за свойства периодичности соответствующих функций.

Укажем еще пример, в котором появление параметра вызвано необходимостью найти путь решения уравнения, хотя в самом уравнении параметра нет.

Пример. Решите уравнение $\sin x + \cos 24x \cos x = \sqrt{2}$.

Путь к решению состоит в параметризации условия задачи. Обозначив $\cos 24x = p$ и записав параметризованное условие в виде $\sin x + p \cos x = \sqrt{2}$, можно двигаться далее, выясняя, например, при каких значениях параметра данное уравнение имеет решение.

4. Даже единственная переменная на каком-то этапе решения может приобретать свойства параметра. Приведем следующий пример.

Пример. Решите уравнение $\sqrt{5 + \sqrt{5 + x}} = x$.

Решение. Проведем равносильные преобразования, рационализирующие данное уравнение.

$$\sqrt{5 + \sqrt{5 + x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 5 + \sqrt{5 + x} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{5}, \\ 5 + x = (x^2 - 5)^2. \end{cases}$$

Следующим шагом уравнение системы приводится к общему уравнению 4 степени вида $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$, которое рациональных, а тем более, целых корней не имеет. Оно, конечно, может быть решено методом неопределенных коэффициентов, однако путь этот трудоемок и долог.

Другое дело, если это уравнение рассмотреть как уравнение относительно символа 5(!), придав временно переменной статус параметра, а символу 5, напротив, — статус переменной. Имеем: $5 + x = 5^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 5 + x^4 \Leftrightarrow 5^2 - (2x^2 + 1) \cdot 5 + (x^4 - x) = 0$. Вычислим дискриминант этого уравнения (он будет зависеть от параметра!).

$$D(x) = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Следовательно, это уравнение легко разрешается относительно символа 5.

$$\sqrt{5 + \sqrt{5 + x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 5 + \sqrt{5 + x} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{5}, \\ 5 + x = (x^2 - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \leq x, \\ 5 = x^2 - x \\ 5 = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Дальнейший ход решения этого уравнения прост.

Подводя итог, можно сформулировать определения.

Определение 1. Параметром называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющая» решением задачи.

Определение 2. Задача, условие которой содержит или в ходе решения которой появляется хотя бы одна независимая переменная, удовлетворяющая определению понятия «параметр», называется задачей с параметрами.

Введенное определение параметра позволяет сформулировать простейшие, но весьма важные для дальнейшего понимания следствия.

Следствие 1. Все величины, входящие в аналитическое выражение, задающее условие задачи, подразделяются на две категории: постоянные и переменные.

Определение 3. Постоянными называются величины, значения которых остаются неизменными в условиях любой задачи, использующих их.

Заметим, что использование в качестве идентификатора постоянной величины чисел не обязательно. Постоянные величины могут обозначаться и буквами.

Следствие 2. Объявление тех или иных независимых переменных искомыми или параметрами определяется либо условиями задачи, либо методами, используемыми в ходе ее решения.

Следствие 3. Любая переменная, входящая в аналитическое выражение, задающее условие задачи (и, как мы видели, не только искомая), может быть объявлена неизвестной (аргументом).

Следствие 4. Все оставшиеся переменные объявляются параметрами, которым «присваиваются по умолчанию» некоторые числовые значения, входящие в область определения аналитического выражения, задающего условие задачи.

4.4. Основные понятия, связанные с определением параметра

Следующим шагом является введение понятий, непосредственно опирающихся на определение «параметра». Первым из них является понятие «допустимого значения параметра». Будем исходить из следующего определения.

Определение 4. Допустимым значением параметра будем называть такое его значение, при котором область определения данной задачи есть непустое множество.

Другими словами: значение параметра считается допустимым, если найдется хотя бы один набор значений других переменных, входящих в условие данной задачи, при подстановке которого совместно с заданным значением параметра в аналитическое выражение, задающее условие, оно (выражение) имеет смысл.

Приведем ряд примеров, поясняющих данное понятие. При этом будем считать, что переменные, входящие в соответствующее условие, принимают действительные значения, и в каждом примере, следуя традиции, в качестве искомой выберем переменную x .

Пример. В уравнении $ax + 1 = 0$, рассматриваемом относительно переменной x , допустимым является любое действительное значение параметра a .

Пример. В неравенстве $\frac{x}{a} > 1$ допустимыми являются все действительные значения параметра a , кроме $a = 0$.

Пример. В уравнении $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} + a = 0$ допустимым является любое значение параметра, хотя для каждого из них существует единственное значение переменной, при котором данное уравнение имеет смысл.

Пример. В уравнении $\sqrt{3-x} + \log_2(x-3) + a = 0$ множество допустимых значений параметра пусто.

Определение 5. Допустимые значения параметра образуют некоторое множество, называемое областью допустимых значений параметра. Далее будем обозначать это множество D_p .

Правомерен вопрос: если значение параметра не входит в область допустимых значений, означает ли это, что при таком значении параметра задача не имеет решения?

Ответ очевиден: если значение параметра не является допустимым, то нельзя вести разговор о существовании или не существовании решения соответствующей задачи. В этом случае будем считать, что сама задача не имеет смысла.

Опираясь на введенное понятие области допустимых значений параметра D_p , можно ввести понятие области определения уравнения или неравенства с параметром или параметрами.

Пусть $F(x, a) \vee 0$ формализованное условие данной задачи, представленное в виде уравнения, неравенства, их систем или совокупностей. Пусть $a \in D_p$ — одно из допустимых значений параметра. Рассмотрим частную задачу $F(x, a) \vee 0$. По определению допустимого значения параметра найдется хотя бы одно значение переменной, при котором условие этой задачи будет определено. Обозначим множество допустимых значений переменной для частной задачи $F(x, a) \vee 0$ как X_a .

Определение 6. Областью определения задачи $F(x, a) \vee 0$ относительно переменной x с параметром a назовем множество $D_F(x, a) = \bigcup_{a \in D_p} (\alpha, X_a)$.

Пример. В неравенстве $\frac{x+a-3}{x-a+3} > 0$ допустимыми являются любые значения параметра a . Однако при каждом $a = \alpha$ значение переменной $x = \alpha - 3$ не входит в область допустимых значений переменной для соответствующей частной задачи. Следовательно, областью определения данного неравенства является множество $D_F(x, a) = R^2 \setminus \{(x, a) | (\forall a \in R)(x \neq a - 3)\}$.

Другими словами, областью определения данного неравенства служит плоскость $(a; x)$, кроме точек, принадлежащих прямой $x - a + 3 = 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение $\frac{x+3}{a(a-2)} + \frac{a(a-2)}{x+a} = 2$.

Допустимые значения параметра

$$D_p(a) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty),$$

а область определения уравнения задается следующим образом:

$$D_F(x, a) = \{(x; a) | (\forall a \in D_p)(x \neq -a)\}.$$

В этом случае из плоскости $(a; x)$ исключены прямые заданные уравнениями $a = 0$, $a = 2$ и $x + a = 0$.

4.5. Понятие решения задачи с параметрами

Как было указано выше, под понятием «задача с параметрами» будем понимать условие задачи, представленное в виде уравнений, неравенств или их систем, совокупностей и т.д.

Проведем анализ понятия «решения задачи (уравнений или неравенств) с параметрами, приведенных в различных УМК по математике. Следует отметить, что в большинстве своем это учебники для углубленного изучения математики.

В учебнике [87] указано, например, что «Решить уравнение с параметром — значит для каждого значения параметра найти множество корней данного уравнения (это множество может быть и пустым)». В приведенном определении ничего не сказано о допустимых значениях параметра.

В учебнике [14] указано следующее: «При решении таких уравнений (неравенств) надо сначала найти множество всех допустимых

значений параметров, а затем разбить это множество на части, в каждой из которых ответ выражается одной и той же функцией через параметры».

В данном определении присутствует понятие «допустимого значения параметра», однако допускается следующая ошибка: решение задачи отнюдь не всегда выражается функцией от параметра. Например, решением уравнения $|x-1|+|x-2|=a$ при $a=1$ служит любое значение переменной $1 \leq x \leq 2$. Это решение не является функцией $x=x(a)$.

В учебнике [68] определение «решения уравнения с параметрами» звучит следующим образом: «Вообще решить уравнение с параметром — это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество корней».

Это определение содержит словосочетание «для любого», что приводит к включению в рассмотрение и тех значений параметров, при которых задача не имеет смысла.

Приведем еще несколько определений, приведенных в популярных пособиях по математике для абитуриентов, поступающих в вузы.

В книге «514 задач с параметрами» [120] сказано: «Под задачами с параметрами понимаются задачи, в которых технический и логический ход решения и форма результата зависят от входящих в условие величин, численные значения которых не заданы конкретно, но должны считаться известными. Эти величины называются параметрами и могут принимать, вообще говоря, произвольные значения...».

Отличный от интуитивного подход к понятию «задача с параметрами», в частности к уравнениям с параметрами, предложен А.Г. Мордковичем и В.А. Гусевым в книге [29]. Следует отметить, что определение дается лишь относительно уравнения с одной переменной и одним параметром. Приведем данное там определение.

«Пусть дано равенство $f(x, a) = 0$. Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x , то уравнение $f(x, a) = 0$ называется уравнением с переменной x и параметром a . Решить уравнение с параметром — это значит, для каждого значения a найти значение x , удовлетворяющее этому уравнению».

Существенным отличием от предыдущих определений является то, что уравнение $f(x, a) = 0$ рассматривается как уравнение с двумя

равноправными переменными, и, кроме того, ставится задача нахождения решения исходного уравнения для каждого значения параметра. Однако требование указать решение для каждого действительного значения параметра приводит опять-таки к тому, во множество значений параметра, при которых уравнение не имеет решения, включается и множество тех значений, при каждом из которых задача вовсе не определена.

Все задачи с параметрами делятся на два класса «по условию». В одном из них ставится условие отыскать решение задачи, а во втором — отыскать некоторое подмножество допустимых значений параметра или параметров, при каждом из которых соответствующие решения задачи обладают указанными свойствами.

Понятие решения задачи с параметром или параметрами естественным образом должно быть сформулировано для обоих классов задач. В соответствии с постановкой задания «решить задачу с параметрами» можно сформулировать следующим образом: решить задачу с параметрами — это значит: провести классификацию совокупности всех получающихся частных видов данной задачи, найти все ее общие решения на соответствующих областях допустимых значений параметров, включая и те, при которых задача решений не имеет.

Определение 7. Решить задачу с параметрами — это значит, установив множество допустимых значений параметра D_p , решить каждую частную задачу, получающуюся при каждом из таких значений.

Для второго класса задач понятие «решить соответствующую задачу» — это значит: найти подмножество допустимых значений параметра, при каждом из которых решение частной задачи отвечает условиям задачи.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих определение.

Пример. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (x+y)^2 = b \end{cases}$$
 и укажите ее решение при заданных значениях параметров $a = \sqrt{2}$, $b = 4$.

Решение. Областью допустимых значений параметра является множество $D_p(a; b) = \{(a; b) | a \in R, b \geq 0\}$.

Если значение параметра $b > 2a^2$, то множество решений данной системы пусто.

Если значения параметра b таково, что $0 \leq b \leq 2a^2$, то решениями системы являются координаты точек кривых, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{2a^2 - b}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{2a^2 - b}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{2a^2 - b}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{2a^2 - b}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{-\sqrt{b} + \sqrt{2a^2 - b}}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{b} - \sqrt{2a^2 - b}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{b} - \sqrt{2a^2 - b}}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{b} + \sqrt{2a^2 - b}}{2} \end{cases}.$$

В частности, если $a = \sqrt{2}$, $b = 4$, система приобретает вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$ и может быть решена обычными методами. Решением частной системы в этом случае будут пары чисел $(-1; -1)$ и $(1; 1)$.

Пример. Решите неравенство $\frac{x}{m-1} - 1 > 0$ и укажите его решение при заданном значении параметра $m = 2$.

Решение. Область допустимых значений параметра m : $\{m \in \mathbb{R} | m \neq 1\}$.

Если $m > 1$, то для любого такого значения параметра решением неравенства является всякое значение переменной x , принадлежащее интервалу $(m-1; +\infty)$.

Если $m < 1$, то для любого такого значения параметра решением неравенства является всякое значение переменной x , принадлежащее интервалу $(-\infty; m-1)$.

В частности, при заданном значении параметра $m = 2$ параметрическое неравенство обращается в линейное неравенство $x - 1 > 0$ с одной неизвестной x . Множество его решений — интервал $(1; +\infty)$.

Пример. Укажите все значения параметра, для каждого из которых неравенство $(a-1)x^2 - (5-a)x + 2 > 0$ верно для любого значения переменной x .

Решение. Отметим, что не ставится условие нахождения общего решения. Искомые значения параметра задаются системой $\begin{cases} a-1 > 0, \\ (a-5)^2 - 8(a-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < 9-4\sqrt{3} \\ a > 9+4\sqrt{3} \end{cases}$.

Таким образом: необходимо разбить область изменения параметра на участки, такие, что при изменении параметра на каждом из них получающиеся уравнения можно решить одним и тем же методом. Отдельно для каждого участка находятся решения уравнения, выраженные через значения параметра. Используемые для этого приемы в точности таковы, как и при решении уравнений с числовыми коэффициентами. Поскольку каждый из методов представляет собой последовательность определенных действий, которые могут выполняться по-разному в зависимости от значений параметра, то выбранные первоначально участки его изменения в процессе решения могут дробиться, с тем, чтобы на каждом из них рассуждения проводились единообразно.

Решение задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения. Сложность задач с параметром заключается в том, что, как правило, вместе с изменением параметра меняются не только коэффициенты, но и ряд других характеристик, связанных с параметром. Как указывает В.И. Голубев [22], «в ответе для любого допустимого значения параметра перечисляемые значения искомой переменной должны быть различны». Обычно это приводит к тому, что при разных значениях параметра приходится использовать различные методы решения.

§ 5. Понятие общего решения уравнений и неравенств с параметром (параметрами)

5.1 Уравнение с одной переменной и одним параметром

Уравнения и неравенства с параметрами выступают как объекты исследований более общего характера, нежели обычные уравнения и неравенства, составляющие соответствующую методическую линию школьного курса математики.

Во-первых: всякое уравнение или неравенство с параметрами есть, с одной стороны, уравнение или неравенство с несколькими независимыми переменными, а с другой — бесконечная совокупность частных уравнений или неравенств. Нахождение решения уравнения или неравенства с параметром или параметрами означает решение каждого из частных уравнений или неравенств соответствующей совокупности.

Во-вторых: метод решения уравнения или неравенства с параметрами включает методы решения частных уравнений или неравенств в качестве частных случаев, моментов исследования;

В-третьих: понятие решения уравнения или неравенства с параметрами претерпевает существенные изменения с изменением количества переменных:

- решение частного уравнения — координата точки числовой оси, общее решение уравнения с одним параметром — координаты точек линии на плоскости;
- решение частного неравенства — координаты множества точек числовой прямой, решение неравенства с одним параметром — координаты точек области на плоскости;
- решение уравнения с двумя переменными — координаты точек области на плоскости, общее решение уравнения с двумя параметрами — координаты точек области в пространстве и т.д.

Основной класс задач с параметрами составляют уравнения, неравенства, системы относительно одной неизвестной и с одним параметром, а также задачи, к ним сводимые. Простейшей задачей является уравнение вида $f(x, a) = 0$. Внося коррективы в определение Мордковича А.Г. и Гусева В.А., приведенного выше [29], имеем: «Если ставится задача для каждого значения параметра $a \in D_p$ решить получающееся уравнение относительно x , то уравнение $f(x, a) = 0$ называется уравнением с переменной x и параметром a . Решить уравнение с параметром — это значит, для каждого допустимого значения a найти все значения x , удовлетворяющие этому уравнению».

Таким образом, уравнение $f(x, a) = 0$ с параметром a и переменной x рассматривается как абстрактное понятие — результат обобщения по двум существенным признакам [23]:

- это двуместный предикат на множестве действительных чисел, содержащий знак равенства $=$.
- поставлена задача поиска множества решений на всех прямых $a = \alpha, \alpha \in D_p$.

Задача поиска множества решений на всех прямых $a = \alpha$ превращает уравнение с двумя переменными в бесконечную совокупность частных уравнений $f(\alpha, x) = 0$. Итак, в самом определении уравнения с параметром зафиксирована связь общего и конкретного. Поскольку частное уравнение $f(\alpha, x) = 0$ получено из уравнения с параметром $f(a, x) = 0$ для конкретного значения $a = \alpha$ параметра, то метод решения уравнения $f(\alpha, x) = 0$ получается как частный случай общего метода решения уравнения $f(a, x) = 0$. Переход от общего и абстрактного к единичному и конкретному как к частному проявлению общего характеризует весь процесс развития теории уравнений с параметрами — процесс восхождения от абстрактного к конкретному. Уже этот факт подчеркивает неэмпирическую сущность уравнения с параметром, поскольку «выведение возможных частных случаев из некоторой всеобщей формы по определенному закону характеризует функционирование в мышлении собственно теоретического понятия» [30].

Введенное понятие уравнения с параметром имеет тесную связь с другим теоретическим понятием — понятием функции:

- формальная запись уравнения относительно указанной переменной с параметром определяется явной или неявной функциональной зависимостью от нескольких переменных, параметрическому представлению зависимости соответствует параметрический вид уравнения;
- конкретный вид зависимости позволяет выделить соответствующий вид уравнений;
- в процессе решения уравнения с параметрами существенную роль играют свойства функции, заданной параметрически.

Абстрагируясь от вида конкретных уравнений с параметрами, поставим задачу выявления внутренних системных свойств уравнения $f(x, a) = 0$ с параметром в их закономерных взаимосвязях. Помимо абстрактного свойства, выраженного предикатом равенства, всякое уравнение с параметром характеризуется множеством решений. Этим свойством обладают и частные уравнения. Понятие равносильности уравнений и равносильные преобразования опять же связаны с наличием или отсутствием решений. На основании указанной выше связи общего и единичного вводится понятие общего решения.

Определение 8. Соответствие $x = x(a)$ называется общим решением уравнения $f(x, a) = 0$ с параметром a и переменной x на множестве допустимых значений параметра, если для каждого $a = \alpha$ из множества допустимых значений параметра D_p любое значение $x = x(\alpha)$ является решением соответствующего частного уравнения $f(x, \alpha) = 0$.

Понятие общего решения уравнения с параметром — теоретическое понятие.

Во-первых, в нем осуществляется обобщение внутренних качеств — решений частных уравнений $f(\alpha, x) = 0$, непосредственно не воспринимаемых, являющихся продуктом умозаключения, получающихся опосредованным путем (равносильными преобразованиями).

Во-вторых, совокупность общих решений позволяет проводить классификацию частных уравнений по типам, то есть осуществлять дедуктивный переход от абстрактного к конкретному.

В-третьих, понятие общего решения играет основную роль в процессе исследования всякого уравнения с параметрами.

Одна из важнейших особенностей понятия общего решения состоит в том, что в процессе исследования уравнения с параметром мы имеем дело с реальными, чувственно данными частными уравнениями. Понятие общего решения выступает как способ проявления частных уравнений внутри некоторого целого — уравнения с параметром. «Этот переход вещи в вещь, снятие специфичности одной вещи при ее превращении в свое другое, то есть их внутренняя связь, выступает как объект теоретической научной мысли».

«Во-первых, эта абстракция должна указывать «направление» становления системы. Это значит, что ее содержание должно реально соответствовать началу возникновения самого конкретного, началу простому, всеобщему ...

Во-вторых, содержание этой абстракции качественно должно соответствовать природе всей системы, быть самой простой неразвернутой формой отношений внутри целого и его отличительной особенностью; эта простая форма не зависит от других, более развитых отношений целого.

В-третьих, как всеобщая, генетическая основа целого эта абстракция выражает его существенные основания, сущность, обеспечиваю-

щую единство всех происходящих его расчленений на различные относительно самостоятельные компоненты» [30].

В уравнениях с параметрами понятие общего решения выступает в качестве исходной содержательной абстракции. Действительно, в уравнении с параметрами всякое частное уравнение характеризуется множеством решений, каждое из решений получается как значение общего решения для соответствующего значения параметра. Тем самым понятие общего решения обладает свойством всеобщности для совокупности частных уравнений. Поиск всех общих решений уравнения с параметром приводит к нахождению всех решений частного уравнения. Кроме того, как множество решений частного уравнения не зависит от последовательности равносильных преобразований, так и совокупность общих решений на соответствующих множествах значений параметров не зависит от характера выполняемых преобразований. Задача поиска множества решений является одним из абстрактных свойств понятия уравнения, поэтому и в частных уравнениях и в исходном уравнении с параметрами общее решение выражает их существенное основание. Более того, выделение типов частных уравнений с непустым множеством решений осуществляется на модели общих решений, поэтому именно общие решения обеспечивают единство расчленений исходного уравнения с параметром на относительно самостоятельные компоненты — типы частных уравнений.

Понятие общего решения является продуктом мысленного анализа, поскольку в частных уравнениях присутствуют лишь значения общих решений, но не сами теоретические объекты. В этой связи общие решения как внутренние, существенные зависимости непосредственно чувствами восприниматься не могут — «внутреннее обнаруживается в системе, внутри целого, в его становлении. Понятие общего решения, в отличие от эмпирических понятий, не находит нечто одинаковое в каждом частном уравнении, а прослеживает взаимосвязь частных уравнений внутри целого, системы, т.е. в уравнениях с параметром. Другими словами, содержанием данного понятия выступает объективная связь всеобщего и единичного» [30].

5.2. Классы однотипности частных уравнений

Свою значимость как исходной содержательной абстракции понятие общего решения подтверждает в процессе анализа уравнения с параметрами как развивающейся системы через совокупность содер-

жательных абстракций вспомогательного характера. В первую очередь в уравнении с параметрами как бесконечной совокупности частных уравнений выделяются отдельные типы:

- частные уравнения, имеющие пустое множество решений во множестве действительных чисел при любом допустимом значении параметра;
- частные уравнения, имеющие непустое множество решений.

Поскольку указанные типы частных уравнений выделены по формальным признакам, то создается впечатление использования в процессе исследования уравнений с параметрами эмпирических обобщения и абстрагирования. Принципиальным моментом в данной ситуации является тот факт, что выделение типов уравнений осуществляется внутри целостности — данного уравнения с параметром. На множестве частных уравнений понятие общего решения позволяет ввести отношение эквивалентности.

Определение 9. В уравнении $f(x, a) = 0$ с параметром a и переменной x частное уравнение $f(x, \alpha) = 0$ с множеством решений X_α и частное уравнение $f(x, \alpha_1) = 0$ с множеством решений X_{α_1} называются однотипными, если решения этих частных уравнений реализуются в виде одного и того же соответствия.

Пример. Рассмотрим уравнение $x^2 + 2x + c = 0$.

Если поставлена задача «решить уравнение при всех допустимых значениях параметра c », то в этом случае значения параметра c можно разбить на три области однотипности.

Во-первых, те значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет два различных решения: $c < 1$.

Во-вторых, значение параметра $c = 1$, при котором уравнению удовлетворяет единственное значение переменной.

В-третьих, значения параметра $c > 1$, при каждом из которых уравнение не имеет решения.

Изменение условия задачи влечет изменение областей однотипности параметров.

Так, первое множество параметров, т.е. тех, при которых уравнение имеет два различных решения, может быть разбито на более мелкие классы, согласно измененному условию задачи. Например, можно выделить подмножество значений параметров, при каждом из кото-

рых корни уравнения разных знаков, подмножество значений параметра, при котором корни больше единицы и т.д.

Введенное отношение эквивалентности осуществляет разбиение совокупности всех частных уравнений на непересекающиеся классы — типы частных уравнений с данным множеством общих решений. Таким образом, исходная содержательная абстракция общего решения действительно составляет генетическую основу, является сущностью уравнений с параметрами, разбивая абстрактное (исходное уравнение) на самостоятельные компоненты (типы частных уравнений) конкретного характера.

Непосредственно из определения следует, что исходное уравнение $f(x, a) = 0$ можно представить в виде совокупности следующих типов частных уравнений:

- частные уравнения, не имеющие решения при всех допустимых значениях параметра;
- частные уравнения, имеющие не более чем счетное множество решений;
- частные уравнения, имеющие множество решений мощности континуум.

В свою очередь, два последних типа уравнений могут быть также разделены на более узкие классы частных уравнений.

Например, частные уравнения, имеющие не более чем счетное множество решений, могут быть разделены на:

- уравнения, имеющие единственное решение;
- уравнения, имеющие два различных решения;
- уравнения, имеющие три различных решения, и т.д.

Частные уравнения, множество решений которых имеет мощность континуум можно разделить следующим образом:

- уравнения — верные числовые равенства, т.е. обращающиеся в тождество при любом значении параметра из множества D_p ;
- уравнения, множеством решений которых является луч;
- уравнения, множеством решений которых является интервал.

Следует отметить, что существуют уравнения промежуточных типов, решения которых есть объединение некоторого дискретного множества и числового промежутка.

Однако в понятии общего решения помимо зависимости $x = x(a)$, определяющей решение частных уравнений, указывается и область

общего решения — совокупность всех значений параметров, соответствующих данному классу или типу частных уравнений. Поэтому D_p мы также должны разбить на некоторые множества «однотипности параметра».

Определение 10. Два значения параметра называются однотипными, если в условиях данной задачи соответствующие им частные уравнения принадлежат к одному типу.

Определение 11. Множество параметров, для которых частные уравнения, соответствующие им, принадлежат одному типу, задаваемому условием задачи, называется множеством однотипности параметров.

Таким образом, с каждым типом частных уравнений, заданным условием задачи, связано множество соответствующих значений параметра — область однотипности. Тогда совокупности всех типов частных уравнений соответствует совокупность непересекающихся областей однотипности, объединение которых составляет область допустимых значений параметров. В уравнении $f(a, x) = 0$ с параметром a и переменной x выделение областей однотипности осуществляется точками — граничными значениями параметра, в уравнении $f(a, b, x) = 0$ с параметрами a и b области однотипности выделяются линиями граничных значений параметров.

Понятие граничных значений параметров возникает на основе общего понятия области однотипности значений параметров, выделенных посредством следующего абстрактного свойства:

- в уравнении $f(a, x) = 0$ с параметром a и переменной x значения параметра, составляющие область однотипности, удовлетворяют некоторому сравнению $g(a) \vee 0$;
- в уравнении $f(a, b, x) = 0$ с параметрами a и b область однотипности значений параметров задается сравнением $g(a, b) \vee 0$.

Определение 12. Граничными точками области однотипности параметров называются:

- граничные точки множества значений переменной, являющейся параметром, не входящие в D_p ;
- изолированные точки значений переменной, являющейся параметром, не входящие в D_p .

значения переменной, являющейся параметром, входящие в D_p , в которых или при «переходе» через которые существенного меняется решение задачи (точки бифуркации).

Существенность изменения общего решения может выражаться как количественно (изменение количества решений задачи), так и качественно. Под качественным изменением решения будем понимать изменение представления соответствия $x = x(a)$, $a \in D_p$.

Следует отметить, что сами точки граничных значений параметров могут как входить, так и не входить во множество допустимых значений параметров, что напрямую следует из приведенного определения.

Основой для выделения «однотипных» значений параметра является само условие задачи.

Пример. При решении неравенства $ax > 1$ граничным значением является $a = 0$, входящее в область допустимых значений параметра, а в аналогичном неравенстве $\frac{x}{a} > 1$, граничное значение $a = 0$ не входит в область допустимых значений.

Пример. Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 5, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

Область допустимых значений параметра $D_p(a) = R$. Граничными значениями параметра, кроме $a = 0$, будут являться допустимые значения параметра, в которых существенным будет считаться изменение количества решений данной системы. Таких значений будет три: $a = 5$, $a = \frac{25}{4}$, $a = 25$. Количество решений системы распределится следующим образом (Рис. 12):

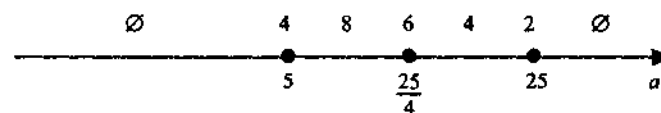


Рис. 12

Таким образом, допустимые значения параметра разбиваются на 5 областей однотипности, определяемые количеством решений системы при каждом из значений параметра.

Пример. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$
 не имеет решения.

Решение. В результате исследования данной системы можно выделить два граничных значения параметра: $a = -2$ и $a = -4$, в которых количество решений системы меняется. В частности, при $a = -2$ система имеет бесконечно много решений, однако, с точки зрения поставленного условия, данное значение параметра принадлежит к той же области однотипности, что и, например, $a = 1$, при котором система имеет единственное значение. В рамках данного условия единственное решение или бесконечное множество решений — синонимы. Таким образом, частные системы, а вместе с ними допустимые значения параметра, разбиваются на две области однотипности.

Приведенный пример подтверждает высказанное выше утверждение о том, что: принадлежность параметров к одной области однотипности значений определяется условием исходной задачи.

Внутренними причинами выделения граничных значений параметров посредством уравнений являются:

- во-первых, требования равносильности проводимых преобразований на определенном множестве значений параметров;
- во-вторых, исследование области допустимых значений параметров, для которых общее решение $x = x(a)$ входит в область определения уравнения.

Главное предназначение граничных значений параметра — обозначение областей однотипности во множестве допустимых значений параметра. В уравнении с параметром множество действительных чисел, для которых существуют соответствующие частные уравнения — область допустимых значений параметра. Последующие абстрактные понятия граничных значений параметра обеспечивают разбиение области допустимых значений параметра на области однотипности. Итак, в процессе исследования уравнения с параметром осуществляется вычленение типов частных уравнений с помощью абстракции общего решения и выделение областей однотипности посредством

абстрактного понятия граничных значений параметра. При этом множество значений параметра превращается в модель общих решений, обеспечивая ориентировку в последовательности этапов решения.

Фактически уравнение с параметром, как исходная абстрактная система, «в процессе восхождения превращается в мысленное конкретное, в котором включены лишь те связи и отношения, которые действительно выводимы из его сущности и вместе с тем не отягощают его приводящими, побочными свойствами и деталями» [30].

Последовательное введение абстракции общего решения, граничных значений параметра формирует общий план решения уравнения с параметром:

- в условиях исходной задачи устанавливаются: область допустимых значений параметра, граничные значения параметра, области однотипности;
- с помощью равносильных преобразований на выделенных областях однотипности определяются общие решения уравнения;
- на модели общих решений пересечением областей общих решений устанавливаются типы частных уравнений.

Система познавательных действий выделенных этапов общего метода показывает, что абстрактные понятия общего решения, граничных значений параметра «раскрывают всеобщее содержание предметов, приводят их в систему и образуют теорию, которая соответствует внутреннему их содержанию» [23]. Помимо этого, приведенные этапы исследования создают «общий план рассматриваемого целого в его основных, главных «расчленениях», который позволяет в процессе восхождения не сбиваться на окольные пути и своевременно создавать нужные абстракции». Как отмечает В.В. Давыдов [30], «способность видеть целое раньше его частей весьма важна как предпосылка, одно из необходимых условий теоретического воспроизведения действительности». Отметим, что данное замечание как нельзя лучше характеризует системный подход и системное мышление, развиваемое решением задач с параметрами.

Анализ уравнения с параметром посредством введенных содержательных абстракций позволяет создать общий план исследования, являющийся внутренним, идеальным планом. Ограниченность плана объясняется главным образом тем, что в записи уравнения с параметром использовалось только общее понятие соответствия. Переход к конкретной зависимости (линейной, рациональной, показательной и

т.д.) позволяет в теоремах установить все граничные значения параметра и, следовательно, разбиение области допустимых значений параметра на области однотипности. В результате общий план исследования «целостности» превращается в план исследования уравнения данного вида — также идеальный, но со значительно большей детализацией и возможностью его реализации в уравнении конкретного вида. Общий план исследования уравнений с параметром данного вида и является основным объектом усвоения. В процессе восхождения от генетически исходной абстракции (общего решения) к конкретному (уравнению как совокупности всех его типов) установлена внутренняя взаимосвязь введенных понятий, получено обоснование проявления общего метода в чувственно наблюдаемых объектах — конкретных уравнениях с параметром. Указанный этап синтеза есть заключительный этап научно-теоретического мышления в процессе решения уравнений с параметром данного вида. Исследование процесса развертывания линии уравнений с параметрами с позиций формирования системного типа мышления, методы решения уравнений с параметрами, как результат такого исследования, позволяют переходить к практической реализации — формированию материализованных учебных действий в коллективной, индивидуальной формах и доведение некоторой совокупности исполнительских операций до характера свернутых умственных актов.

5.3. Понятие общего решения неравенства с параметром

Аналогично уравнению $f(x, a) = 0$ относительно переменной x с параметром a неравенство $f(x, a) < 0$ — абстрактное понятие, характеризующееся двумя свойствами.

1. Неравенство с параметрами — это двуместный предикат на множестве действительных чисел, содержащий символ сравнения $>, <, \geq, \leq$.

2. Для данного неравенства ставится задача поиска решения для всех значений параметра $a = \alpha$.

Неравенство с параметром $f(x, a) < 0$ самым естественным образом связано с понятием уравнения $f(x, a) = 0$.

В самом деле: области допустимых значений параметра для уравнения $f(x, a) = 0$ и неравенства $f(x, a) < 0$ одинаковы, последова-

тельность равносильных преобразований, упрощающих условие, одинакова. Далее: всякое решение уравнения $f(x, a) = 0$ определяет линию $x = x(a)$, разбивающую область определения неравенства на области знакопостоянства.

Пример. Рассмотрим, например, неравенство вида $P(a, x) < 0$, где $P(a, x)$ — многочлен от двух аргументов. Если условие $P(a, x) = 0$ определяет некоторую линию на координатной плоскости, то множество точек, не принадлежащих этой линии, состоит из некоторого конечного числа областей $G_1, G_2, \dots, G_n$, ограниченной линией $P(a, x) = 0$ (Рис. 13).

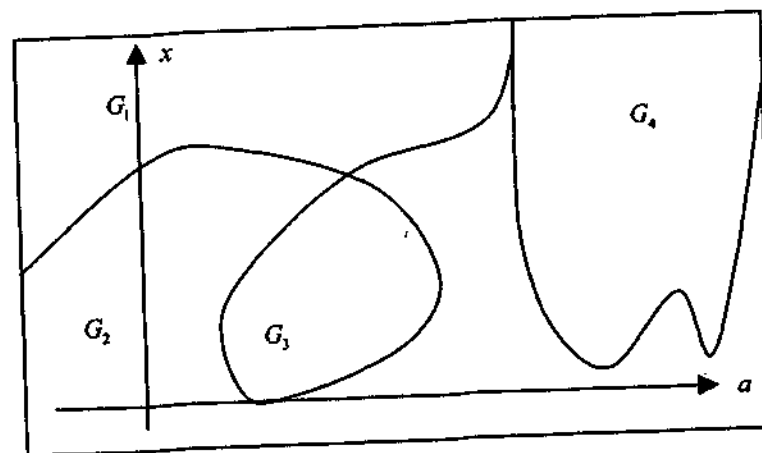


Рис. 13

В любой точке каждой из областей многочлен $P(a, x)$ отличен от нуля, т.к. все точки, в которых $P(a, x) = 0$, принадлежат границе этих областей.

Верна следующая теорема.

Теорема. В каждой внутренней точке любой из областей $G_1, G_2, \dots, G_n$, на которые линия, заданная уравнением, делит плоскость, многочлен $P(a, x)$ либо положителен, либо отрицателен. Докладывание теоремы выходит за рамки курса средней школы, однако ее смысл достаточно понятен.

Данная теорема является обобщением известного метода интервалов решения неравенств с одной переменной. Таким образом, общее решение неравенства $P(a, x) > 0$ образует совокупность тех областей, в которых значения многочлена отвечают соответствующему знаку неравенства. Для установления, какая из областей входит в ту или иную совокупность, достаточно вычислить значение $P(a, x)$ в какой-нибудь определенной точке этой области. При каждом значении параметра $a \in D_p$ возникает частное неравенство $P(a, x) > 0$ относительно одной переменной, решаемое частными методами. Множество решений этого неравенства обозначим X_a . Геометрически это множество определяется как множество соответствующих координат x точек прямой $a = a$, принадлежащих соответствующим областям знакопостоянства $P(a, x)$.

Аналогично, в неравенстве $\frac{f(x, a)}{g(x, a)} > 0$ общие решения уравнений $f(x, a) = 0$ и $g(x, a) = 0$ определяют границы областей знакопостоянства данного выражения. При этом общее решение уравнения $f(x, a) = 0$ будем называть нулями выражения $F(x, a) = \frac{f(x, a)}{g(x, a)}$, а общее решение уравнения $g(x, a) = 0$ называют точками разрыва. Естественно, что при этом общие решения системы уравнений $\begin{cases} f(x, a) = 0, \\ g(x, a) = 0 \end{cases}$ не могут быть решениями неравенства. Границы областей знакопостоянства определяют и вид общего решения данного неравенства.

Пример. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\frac{x-2a-3}{x-a+3} < 0$ выполняется для всех $x \in [1; 2]$.

Решение. Изобразим на координатной плоскости ГМТ, заданное системой неравенств $\begin{cases} \frac{x-2a-3}{x-a+3} < 0, \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Границами областей решения

первого неравенства будут прямые, заданные уравнениями $x = 2a + 3$ и $x = a - 3$, причем второе уравнение будет задавать множество точек разрыва. Решение второго неравенства есть геометрическое место точек, ординаты которых удовлетворяют неравенству $1 \leq x \leq 2$ (Рис. 14).

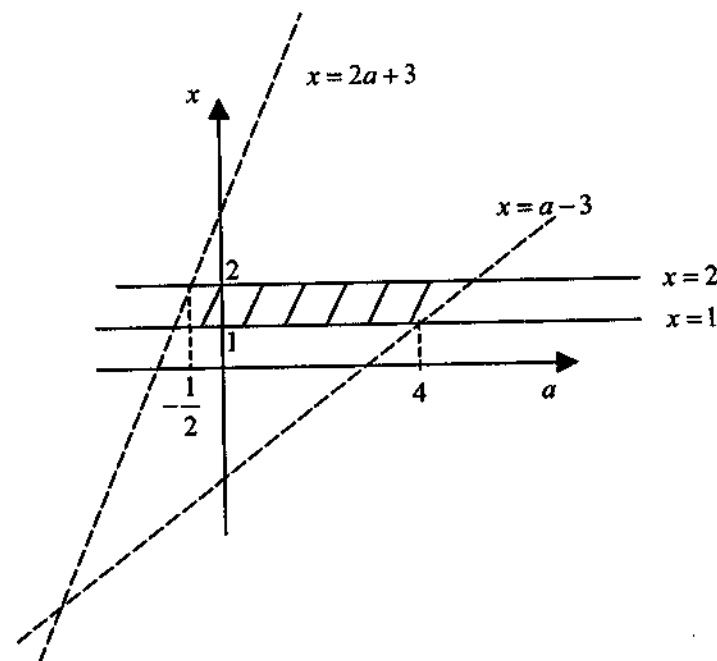


Рис. 14

При $-\frac{1}{2} < a < 4$ неравенство будет верно для всех $x \in [1; 2]$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$.

Глава 3. Реализация концепции формирования содержательно-методической линии задач с параметрами

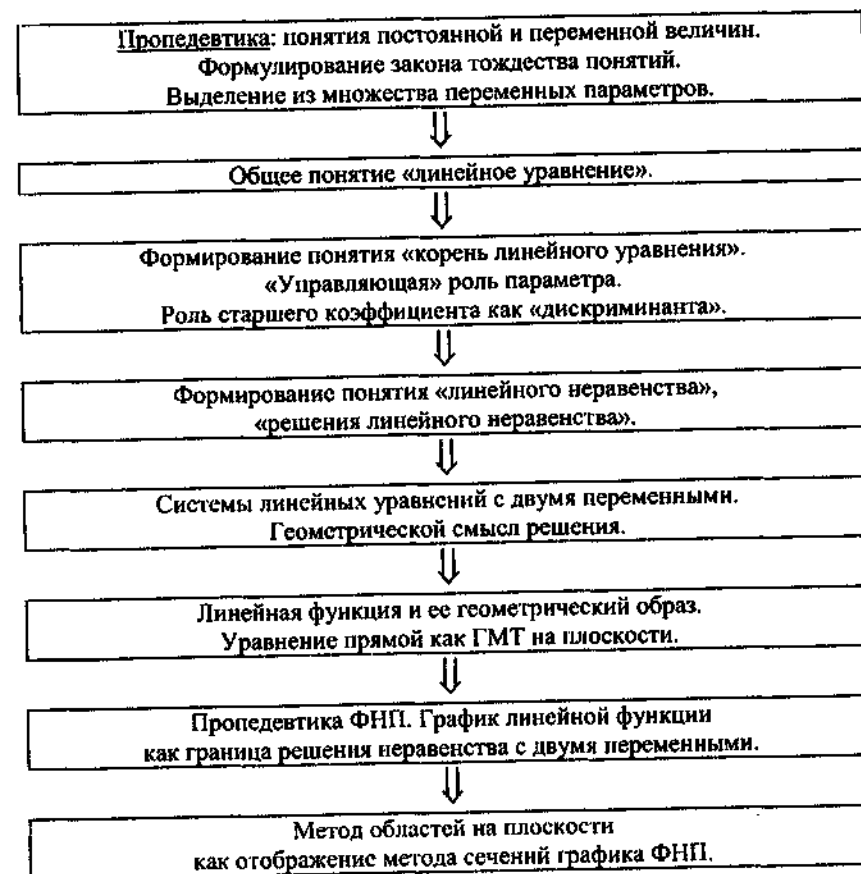
§ 1. Линейное уравнение, линейное неравенство, линейная функция

Несмотря на кажущуюся необъятность области, называемой задачами с параметрами, не составляет большого труда выделить ее «фундаментальные» образующие. Это задачи, приводящие к исследованию уравнений или неравенств степени не выше второй, задачи, приводящие к исследованию их систем и совокупностей, задачи, использующие свойства квадратного трехчлена, тригонометрические задачи. Конечно, с появлением каждой новой функции — иррациональной или трансцендентной — появляются и специфические, только ей присущие свойства, привносящие дополнительные условия в решения задач. Однако методами декомпозиции условий иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства, а также их системы или совокупности приводятся к исследованию вышеперечисленных задач. Таким образом, благополучие в овладении методами решения произвольных задач с параметрами возможно лишь тогда, когда полностью усвоены методы исследования простейших уравнений и неравенств степени не выше второй.

1.1. Формирование понятия постоянной и переменной величин. Выделение из множества переменных параметров

Линейная функция и линейное уравнение — одна из главнейших тем всего курса математики, основа формирования содержательно-методических курсов математики, в том числе и содержательно-методической линии задач с параметрами. Введение основных понятий, связанных с понятиями «параметр, задача с параметрами, решение задачи с параметрами», в этой теме условно можно представить в виде таблицы, каждая строка которой есть некое отображение соответствующего этапа.

Таблица 2



Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами как сквозной линии, т.е. линии, проходящей через все разделы школьной математики и имеющей продолжение в курсе высшей математики как линии функций нескольких переменных, необходимо начинать на самом раннем этапе, одновременно с введением основных понятий курса алгебры и разворачиванием других содержательно-методических линий — линии преобразований, линии уравнений и неравенств. Опыт преподавания в школе и вузе показывает, что качество усвоения математического материала существенно выигрывает от того, если каждое новое понятие, каждый новый термин вводятся так, чтобы была видна его связь с уже известными понятиями и терминами и чтобы была понятна целесообразность его изучения. Одним

из основных законов правильного мышления является закон тождества, который состоит в том, что мысль, заключенная в некотором высказывании, должна оставаться (считаться) неизменной на протяжении всего рассуждения, в котором это высказывание фигурирует [85]. Тем самым, как нормативное правило мышления закон тождества запрещает употреблять термины, в том числе математические, в различных смыслах. Другими словами, нельзя подменять в процессе рассуждения (мышления) какое-либо понятие (или суждение) другим понятием (или суждением), нельзя употреблять термины в различных смыслах; закон тождества требует четкости, ясности и однозначности понятий. Анализ школьных учебников и учебных пособий показывает, что существует много понятий, терминов, обозначений, которые определяются неоднозначно, что, естественно, не может не отразиться на уровне понимания знаний школьниками [67].

Поэтому в обязанность учителя должно входить тщательное исследование разницы между определениями, обозначениями, символами и естественными последствиями этой разницы, а также, конечно, разработка соответствующих разъяснений. Поскольку в основе усвоения любых знаний, в том числе и математических должен лежать принцип понимания, то нужно стараться избегать двойной терминологии для математических понятий, а также двойного смысла одного термина. Например: коэффициент (постоянная величина) и коэффициент при приоритетно выделенной переменной (величина переменная), решение уравнения (как процесс) и решение уравнения (как результат этого процесса) и др.

В курсе алгебры учащиеся изучают понятия, оперирующие с двумя видами величин — постоянными и переменными. Так, например, в учебнике [79] сказано: «числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена». На протяжении первого этапа формирования математического языка этот подход неукоснительно выдерживается. Опираясь на закон тождества понятий [85], мы считаем, что уже на самом первом этапе изучения алгебры должно быть введено и далее неукоснительно выдерживаться разделение всех используемых величин на постоянные и переменные с обязательным указанием того, что выбор идентификатора той или иной величины — дело учащегося. При рассмотрении обозначений также следует упомянуть о том, что в практике решения задач могут встречаться (и обязательно будут встречаться) случаи использования

отдельных букв или целого набора символов в качестве идентификаторов постоянных величин, такие, как, например, π , $\ln 2$. Если такое разделение будет выдерживаться и в дальнейшем, то это непосредственно приведет к необходимости появления понятия «параметр».

При первоначальном определении величины, приводимом во всех учебниках Федерального комплекта, происходит разделение величин на постоянные и переменные. Переменные величины, в свою очередь, можно условно разделить на приоритетные — аргументы, искомые и остальные — параметры. Данное разделение можно представить в виде схемы, представленной на рис. 15.

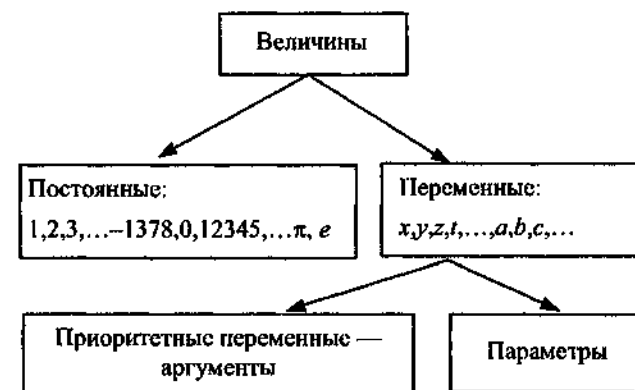


Рис. 15

Таким образом, получим:

1. Все входящие в данное уравнение или неравенство переменные равноправны, и каждая из них может быть объявлена неизвестной (аргументом).
2. Все оставшиеся переменные объявляются параметрами, которым присваиваются по умолчанию некоторые числовые значения, входящие в область определения данного аналитического выражения.
3. Объявление тех или иных переменных аргументами или параметрами определяется условиями поставленной задачи или методами, пригодными для ее анализа и решения.

Реализация представленного разделения может отрабатываться в системе упражнений, подобных следующему:

Упражнение 1. Укажите постоянные и переменные величины, входящие в уравнения.

- | | |
|------------------|------------------|
| 1) $2x+1=a$ | 2) $a+x=a^2x+1$ |
| 3) $5+x=ax$ | 4) $ax-b=1+x$ |
| 5) $4=ax$ | 6) $x=b-a^2x$ |
| 7) $x=a^2x$ | 8) $ax-b^2=7$ |
| 9) $ax-a^2=4-2x$ | 10) $3-a^2x=x-b$ |

Следует также обратить внимание на определения как степени одночлена, так и степени многочлена с несколькими переменными. Вместе с традиционным определением степени как суммы степеней входящих в него переменных, вводится определение степени одночлена и многочлена относительно отдельной приоритетно выделенной переменной. Это позволит, во-первых, самым естественным образом ввести понятие степени целого алгебраического уравнения относительно данной неизвестной, например, линейного или квадратного, во-вторых, соблюдет закон тождества понятий, в-третьих, соблюдает принцип равноправности переменных. Указание приоритетно выделенной переменной (аргумента, искомой и т.д.) предоставит возможность, не нарушая закона тождества понятий, сформулировать определение коэффициента одночлена и многочлена как множителя, входящего в данный одночлен, наряду со степенью этой переменной. Тем самым не надо будет отдельно каждый раз оговаривать, имеем ли мы дело с общим видом уравнения или с каким-нибудь конкретным уравнением или неравенством.

1.2. Введение понятия уравнения, линейного относительно приоритетно выбранной переменной

1.2.1. Рассмотрение частных случаев линейных уравнений

Практика часто ставит перед нами задачу выяснить, при каких допустимых значениях переменной или переменных левая и правая часть равенства принимают одинаковые значения. На равенство в этом случае мы смотрим как на уравнение относительно указанной неизвестной величины. Так, если равенство $a+7=10$ рассматривать как уравнение относительно величины a , то легко сообразить, что обе его части принимают одинаковые значения при $a=3$. Если же $a \neq 3$,

то равенство левой и правой частей невозможно. Число 3 называется корнем уравнения $a+7=10$.

Вообще корнем уравнения относительно заданной неизвестной величины будем называть любое значение этой величины, при подстановке которого в уравнение обе части уравнения принимают одинаковые числовые значения.

Изучение темы должно начинаться с решения конкретных линейных уравнений относительно единственной входящей в них переменной. Дается определение линейного уравнения как уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — двучлен первой степени относительно приоритетно выделенной переменной. (Опять же совершенно необязательно, чтобы обозначение этой переменной было x). Самыми простыми являются уравнения, обе части которого являются многочленами первой степени относительно выделенной переменной. Например, в уравнении $3x-6=4-2x$ правая и левая части уравнения — многочлены первой степени относительно переменной x . Тождественными преобразованиями это уравнение можно записать в виде $5x-10=0$. Легко видеть, что единственным корнем (или решением) этого уравнения является число 2.

Упражнение 2 (формирующее прием мыслительной деятельности «анализ»). Решите уравнения относительно единственной переменной, входящей в них.

- | | |
|----------------|---------------------|
| 1) $x-5=2$ | 2) $2t+3=4$ |
| 3) $2y-3=3y-2$ | 4) $5(x+1)-2x=3x+5$ |

Переход от рассмотрения тождественных преобразований алгебраических выражений к рассмотрению первого вида алгебраического уравнения — линейного уравнения — при традиционном изложении, с нашей точки зрения, сразу приводит к противоречию, связанному с нарушением закона тождества, которое в дальнейшем так и остается неразрешенным.

Например, в учебнике [68] сказано следующее: «Уравнение $ax+b=0$, где $a \neq 0$ называют линейным уравнением с одной переменной x (или линейным уравнением с одной неизвестной x)».

Формулировка внутренне противоречива, что приводит к «нелепицам» при решении уравнений типа $3(x+2)=3x+6$ или

$3(x+2)=3x+5$. Решая первое из них, учащийся получит следующее:
 $3(x+2)=3x+6 \Leftrightarrow 3x+6=3x+6 \Leftrightarrow 3x-3x=6-6$, т.е. $0=0$. Решая же второе уравнение, учащийся и вовсе придет к равенству $0=-1$.

Рассмотрение таких примеров заставляет критически отнестись к алгоритму нахождения неизвестной и по-другому взглянуть на определение корня уравнения. Дальнейший анализ позволяет сделать вывод о том, что иногда невозможно однозначно ответить на вопрос о количестве решений уравнения, обе части которого есть линейные многочлены.

Упражнение 3 (формирующее прием мыслительной деятельности «синтез»).

1. Составьте линейное уравнение относительно переменной x , корнем которого будет являться число 1.

2. Составьте линейное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого будет являться число $\frac{2}{7}$.

3. Составьте линейное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого будет являться любое действительное число.

4. Составьте линейное уравнение, не имеющее решения.

Далее: задает ли формула $ax+b=0$ линейное уравнение или этой формулой задается бесконечное множество линейных уравнений относительно переменной x ? Почему приоритет отдается именно переменной x , почему переменные a и b становятся числами? Что делать в том случае, если в равенстве $at+b=0$ переменная x отсутствует?

1.2.2. Формулировка понятия «уравнение», «корень уравнения»

Рассмотрим определения линейного уравнения, приводимые в различных учебниках алгебры Федерального комплекта. Отсутствие понятия «параметр», попытка заменить его каким-то другим приводит к тому, что в учебниках нет единого мнения, что называть линейным уравнением.

1. «Уравнение вида $ax=b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа (курсив наш), называется линейным уравнением с одной переменной. Линейное уравнение при $a \neq 0$ имеет один корень $x = \frac{b}{a}$.

Если $a=0$, $b \neq 0$, то уравнение решений не имеет. Если $a=0$, $b=0$, уравнение имеет бесконечно много корней (любое число является его корнем)». [68]

2. «Уравнение вида $ax=b$, где a и b — заданные числа (курсив наш), а x — неизвестная, называется линейным уравнением». Учебник «Алгебра-7» (Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин).

3. «Уравнение $ax+b=0$, где $a \neq 0$ называют линейным уравнением с одной переменной x (или линейным уравнением с одной неизвестной x)». [79]

4. «Уравнение вида $ax=b$, где a и b — любые числа (курсив наш), называют линейным уравнением с одной переменной». Учебник «Алгебра 7–9» (Муравин К.С., Муравин Г.К.).

5. «Уравнение вида $kx+b=0$, $k \neq 0$ называется линейным уравнением с одним неизвестным x ». [87]

6. Учебник «Алгебра 7» (Башмаков М.И.): «Уравнение приводится к линейному, если преобразованиями, сохраняющими все его корни, оно сводится к уравнению вида $ax=b$ ».

Определения линейного уравнения, в зависимости от УМК, разнятся: в одних учебниках (3, 5) коэффициент при неизвестной задается величиной, отличной от нуля, в остальных — величиной, которая может принимать любые значения, а сами идентификаторы a и b выступают то в роли «некоторых чисел», то в роли «любых чисел», то в роли «заданных чисел», то вовсе в определении никак не указываются. И во всех определениях учащимся предлагается пересмотреть ранее введенное разделение величин на постоянные и переменные. Опираясь на историческую традицию, неизвестной объявляется переменная величина x или переменные величины x, y, z , а остальные объявляются, явно или неявно, — постоянными. Например (2): «Уравнение вида $ax=b$, где a и b — заданные числа, а x — неизвестная, называется линейным уравнением».

Использование понятия «параметр» позволяет устранить конфликт при введении понятия линейного уравнения и всех последующих подобных понятий, состоящий в том, что при переходе к анализу соответствующих уравнений роль некоторых идентификаторов переменных резко меняется: одни сохраняют свойства переменной, а другие — нет.

Определение. Линейным уравнением относительно переменной x называется любое уравнение, представимое в виде вида $kx - p = 0$, где k и p — произвольные действительные параметры, принимающие допустимые значения.

Простота общего вида произвольного линейного уравнения дает возможность провести его полный анализ, реализующий принцип восхождения от абстрактного к конкретному [30] и задающий дедуктивный характер построения курса.

1. Если $k \neq 0$, то, применяя правило нахождения сомножителя, получим, что $x = \frac{p}{k}$.

2. Если $k = 0$, то существование или отсутствие решений зависит от значения параметра p .

1) Если $p = 0$, то уравнение приобретает вид $0 \cdot x = 0$, и его решением служит любое действительное значение переменной x .

2) Если $p \neq 0$, то при любом значении переменной x возникает неверное числовое равенство, т.е. уравнение решений не имеет.

Заметим, что роль параметра k в уравнении — это роль дискриминанта квадратного уравнения.

При рассмотрении общего вида линейного уравнения и его решения происходит переход от понятий, опирающихся на эмпирический опыт учащихся, к абстрактным понятиям — формулам, выражающим бесконечное множество уравнений. Надо сформулировать общее определение линейного уравнения с параметром, т.к. чаще всего параметры k и p заменяют собой некоторые аналитические выражения, в свою очередь зависящие от параметра или параметров.

Определение. Значение параметра называется допустимым, если для него существует хотя бы одно значение переменной x , при одновременной подстановке которых в уравнение левая часть уравнения определена, т.е. имеет смысл. Это множество будет обозначаться D_p .

Определение. Уравнение вида $f(a) \cdot x + g(a) = 0$, где $f(a), g(a)$ — некоторые аналитические выражения называется линейным уравнением относительно переменной x и параметром a , если поставлена задача решить уравнение при всех допустимых значениях переменной a , принадлежащих некоторому числовому множеству, являющемуся подмножеством D_p .

Множество допустимых значений параметра в линейном уравнении с одним параметром $f(a) \cdot x + g(a) = 0$ определяется как пересечение областей определения аналитических выражений $f(a)$ и $g(a)$, т.е. $D_p = D(f) \cap D(g)$.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих вышесказанное.

Упражнение 4. Даны уравнения, линейные относительно переменной x . Укажите уравнения, содержащие и не содержащие параметры.

$$1. 2x + 3 = 7x - 2$$

$$2. ax = 3$$

$$3. 12x^2 - a = 10$$

$$4. bx + a = 12$$

$$5. -2x^3 = 4$$

$$6. 2x + 5 = 3(x - 1) + 4$$

$$7. 5 + x = ax^2$$

$$8. 3x - (x - 19) = -2x$$

$$9. x = a^2 x$$

$$10. 6x = 1 - (13 - 6x)$$

Пример 1. Найдите все значения параметра x , при котором уравнение $(a^2 + a + 1)x + a + 1 = 0$ является линейным.

Решение. Выбрав переменную x в качестве параметра, мы тем самым оставили переменную a в качестве неизвестной. Уравнение $(a^2 + a + 1)x + a + 1 = 0$ будет линейным относительно переменной a , если старшая степень этой переменной, входящей в уравнение, будет равна 1. Это возможно лишь тогда, когда коэффициент при второй степени переменной a будет равен 0. А это возможно, если значение параметра x также будет равно 0.

Ответ: 0.

Пример 2. Будет ли линейным относительно переменной x уравнение $(a^2 + a + 1)x + a + 1 = 0$? Будет ли то же уравнение линейным относительно переменной a ?

Решение.

1) Ответ положителен, т.к. наибольшая степень переменной x равна 1.

2) Ответ отрицательный, т.к. наибольшая степень переменной a равна 2.

Таким образом, в ходе первоначального этапа введения понятия «параметр»:

1. Начинает формироваться системный тип мышления учащихся, основанный на системном подходе к рассмотрению новых понятий.

2. Получает логическое обоснование разделение величин на постоянные и переменные, разделение переменных величин на приоритетно выделенные — аргументы и параметры.

3. Закрепляются навыки действия с многочленами от нескольких переменных в ходе решения простейших уравнений с параметром.

4. Формируется навык выражения одной переменной через другую или другие, что является пропедевтикой функциональной зависимости.

5. Вместо линейного алгоритма решения уравнений возникает вставшийся алгоритм.

6. Формируется понятие общего решения математической задачи.

7. При рассмотрении общего вида линейного уравнения и его решения происходит переход от задач арифметического характера, которые опираются на эмпирический опыт учащихся, к абстрактному понятию линейного уравнения, выражающего бесконечное множество частных уравнений, задаваемых одной формулой.

1.2.3. Этап усвоения

В практике обучения обычно рассматриваются уравнения, содержащие не более двух параметров. Это обусловлено тем, что мы владеем в основном двумерным пространством (плоскостью) или трехмерным пространством. Приводимые ниже примеры и задания могут быть использованы в качестве дополнения к основной программе или в виде элективного курса. Главным условием является проведение анализа полученных решений.

Пример 3. Решите уравнение $ax = 3$ при всех значениях параметра a .

Решение. Дано простейшее линейное уравнение относительно переменной x с параметром a . Решить его — это значит:

1) Указать, при каких допустимых значениях параметра a уравнение имеет решения, и найти вид этих решений, в зависимости от значений параметра a .

2) Указать, при каких допустимых значениях параметра уравнение не имеет решений.

Согласно общей схеме анализа решения линейного уравнения, получим:

1. Уравнение имеет смысл при любых значениях параметра.

2. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{3}{a}$.

3. Если $a = 0$, то равенство $0 \cdot x = 3$ невозможно ни при каких значениях переменной x , следовательно, уравнение решений не имеет.

Ответ: При $a \neq 0$ решением уравнения является число $\frac{3}{a}$. При $a = 0$ уравнение решений не имеет.

Пример 4. Решите уравнение $ax - a^2 = 4 - 2x$.

Решение. Выполним равносильные преобразования.

$$ax + a^2 = 4 - 2x \Leftrightarrow ax + 2x = 4 - a^2 \Leftrightarrow (a + 2)x = 4 - a^2.$$

1. Если $a + 2 \neq 0$, т.е. $a \neq -2$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{4 - a^2}{a + 2}$. Но в этом случае дробь, стоящую в правой части

уравнения, можно упростить: $\frac{4 - a^2}{a + 2} = \frac{(2 - a)(2 + a)}{a + 2} = 2 - a$ и записать решение в более простой форме: $x = 2 - a$.

2. Если $a = -2$, то уравнение обращается в равенство $0 \cdot x = 0$, которому будет удовлетворять любое действительное значение переменной x .

Ответ: Если $a \neq -2$, то $x = 2 - a$. Если $a = -2$, то решением является любое действительное число.

Почему надо указывать, относительно какой переменной рассматривается уравнение? Но ведь мы следуем тому, что все переменные равноправны, и только мы определяем, какая переменная является неизвестной. Выбор различных переменных в качестве искомых может привести к интересным исследованиям.

Пример 5. При каком значении параметра p уравнение $px = x + 1$ не имеет решения?

Решение. Определив переменную p как параметр, мы получили уравнение $(p-1)x=1$ относительно переменной x , правая часть которого отлична от нуля. Следовательно, если коэффициент при переменной x будет равен нулю, то уравнение не будет иметь решений. Это возможно лишь при $p=1$.

Ответ: 1.

Пример 6. При каком значении параметра a уравнение $ax=x$ обращается в тождество?

Решение. Запишем уравнение в виде: $(a-1)x=0$. Так как правая часть уравнения есть 0, то уравнение обратится в тождество, если коэффициент при неизвестной x также будет равен 0. А это возможно, если $a=1$.

Ответ: 1.

Пример 7. Решите уравнение $4+mx=3x+1$.

Решение. Будем следовать традиции: x — неизвестная, m — параметр.

Решить его — это значит:

- 1) указать, при каких допустимых значениях параметра m уравнение имеет решения, и найти вид этих решений, в зависимости от значений параметра m .
- 2) указать, при каких допустимых значениях параметра уравнение не имеет решений.

Запишем уравнение в виде: $4+mx=3x+1 \Leftrightarrow (m-3)x=-3$.

Так как правая часть уравнения отлична от нуля, то уравнение либо имеет единственное решение, либо вовсе решений не имеет.

1. Если $m \neq 3$, то $x = -\frac{3}{m-3}$ — единственное решение.

2. Если $m = 3$, то уравнение $0 \cdot x = -3$ решений не имеет.

Ответ: Если $m \neq 3$, $x = -\frac{3}{m-3}$.

Если $m = 3$, уравнение решений не имеет.

Пример 8. Найдите значение переменной x , которое не может быть решением уравнения $4+mx=3x+1$ ни при одном значении параметра m .

Решение. Запишем уравнение в виде: $4+mx=3x+1 \Leftrightarrow x \cdot m = 3x-3$.

Получим, что данное уравнение можно рассматривать как линейное уравнение относительно переменной m и параметром x . Исходя из общей теории, получим, что уравнение не будет иметь решений,

если $\begin{cases} x=0, \\ 3x-3 \neq 0 \end{cases}$, т.е. при $x=0$.

Ответ: 0.

В ходе этапа усвоения:

1. Продолжается формирование системного типа мышления учащихся.
2. Проводится пропедевтика формирования понятия функции, области определения функции.
3. Выявляются существенные признаки понятия «параметр» как независимой управляющей переменной.
4. Формируется понятие «допустимого значения» переменной величины.
5. Линейные уравнения с параметром переводятся из разряда теоретических задач в разряд учебных задач.
6. Наряду с линейным алгоритмом решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами появляется и отрабатывается нелинейный алгоритм решения уравнений с параметрами и исследования полученного решения.
7. Формируются предпосылки введения системы координат.
8. Проводится пропедевтика метода «подстановки» при решении систем уравнений.

Упражнение 5. Решите уравнения.

1. $ax-7=2x+10$

3. $mx+1=x+m$

2. $ax-a=x-1$

4. $2x-4a=ax-1$

Ответы:

1. Если $a \neq 2$, то $x = \frac{17}{a-2}$, если $a=2$, уравнение решений не имеет.

2. Если $a \neq 1$, то $x=1$, если $a=1$, то x — любое действительное число.

3. Если $m \neq 1$, то $x=1$, если $m=1$, то x — любое действительное число.

4. Если $a \neq 2$, то $x = \frac{1-4a}{a-2}$, если $a=2$, уравнение решений не имеет.

Упражнение 6. Решите уравнения.

1. $m^2 x = m(x+2) - 2$

2. $m^2(x-2) - 3m = x+1$

3. $x - \frac{2}{m^3} = \frac{1}{m^2}(4x+1)$

4. $a^2 x + 4 = a(x+2) + b$

5. $(a+x)(b+x) = a(b+1) + \frac{a^2}{b} + x^2$

Ответы: 1) 1. $\forall m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad x = \frac{2}{m}$

2. $m=1 \quad x \in R$

3. $m=0 \quad \emptyset$

2) 1. $\forall m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty) \quad x = \frac{2m+1}{m-1}$

2. $m=1 \quad \emptyset$

3. $m=-1 \quad x \in R$

3) При $m=0$ уравнение не определено.

1. $\forall m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty) \quad x = \frac{1}{m(m-2)}$

2. $m=2 \quad \emptyset$

3. $m=-2 \quad x \in R$

4) 1. $\forall a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty), \forall b \quad x = \frac{4ab-6b+3}{a-1}$

2. $a=1; b=\frac{3}{2} \quad x \in R$

3. $a=-1, \forall b \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \quad \emptyset$

5) 1. $\forall a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad x = \frac{2a+b-4}{a(a-1)}$

2. $a=0, b=4 \quad x \in R$

3. $a=0 \quad \forall b \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty) \quad \emptyset$

4. $a=1 \quad b=2 \quad x \in R$

5. $a=1 \quad \forall b \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty) \quad \emptyset$

Пример 9. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $b^4 x + b^2 - (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Приведем уравнение к стандартному виду, удобному для проведения анализа.

$$\begin{aligned} b^4 x + b^2 - (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} &= b^2(b + \sqrt{2}) + 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (b^4 - 4)x + (b - 2)(b - \sqrt{2}) &= b^2(b + \sqrt{2}) = \\ = (b^2 - 4)x &= (b + \sqrt{2})(b^2 - (b - \sqrt{2})^2) \end{aligned}$$

Если $b^4 - 4 \neq 0$, то при всех таких значениях параметра уравнение будет иметь единственное решение, и поэтому такие значения параметра нас не интересуют.

$$\text{Пусть теперь } b^4 - 4 = 0 \Leftrightarrow (b^2 - 2)(b^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Значение параметра b будет удовлетворять условию задачи, если при его подстановке обе части уравнения будут одновременно равны нулю.

1) Если $b = \sqrt{2}$, то $2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2} \neq 0$

2) Если $b = -\sqrt{2}$, то $0 \cdot (2 - 4\sqrt{2}) = 0$

Следовательно, искомое значение параметра $b = -\sqrt{2}$

Ответ: $-\sqrt{2}$

Пример 10. Решите уравнение $\frac{x-a}{b-a} + \frac{x-b}{a-b} + x = 2$ при всех значениях параметров a и b , таких, что $a \neq b$.

Решение. По условию $a \neq b$, поэтому

$$\begin{cases} \frac{x-a}{b-a} + \frac{x-b}{a-b} + x = 2, \\ a \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} - \frac{x-b}{b-a} + x = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-a-x+b}{b-a} + x = 2, \\ a \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ a \neq b \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: для любых значений параметров $a \neq b$ решением уравнения является число, равное 1.

Пример 11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решение уравнения $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$ больше 2.

Решение. Имеем: $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a \Leftrightarrow 5(a+2)x = 17a + 13$.

Если $a = -2$, то уравнение решений не имеет, при всех других значениях параметра уравнение будет иметь корень, задаваемый формулой $x = \frac{17a+13}{5(a+2)}$. Таким образом, искомые значения параметра будут

являться решением неравенства $\frac{17a+13}{5(a+2)} > 2$.

$$\frac{17a+13}{5(a+2)} > 2 \Leftrightarrow \frac{7(a-1)}{5(a+2)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a > 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

Упражнение 7. Найдите все значения переменной x , которые не могут быть решением уравнения ни при одном значении параметра.

1. $ax - 7 = 2x + 10$
2. $2x - 4a = ax - 1$
3. $ax = 2x + 1$
4. $2mx + 3 = 2m - x$

Ответы: 1) 0; 2) -4 ; 3) 0; 4) 1.

Упражнение 8.

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax = 2x + 1$ не имеет решений.

Ответ: 2.

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x + 2ax + x + 1 = 0$ не имеет решений.

Ответ: -1 .

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x = a(x+2) - 2$ не имеет решений.

Ответ: 0.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x - x = a - 1$ обращается в тождество.

Ответ: 1.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x - x = a - 1$ не имеет решений.

Ответ: -1 .

1.3. Линейная функция. Решение линейных неравенств с одной переменной

Следующим шагом формирования содержательной методической линии задач с параметрами и методов их решения является рассмотрение общего понятия неравенства с параметром или параметрами, решения неравенств. Переход от решения конкретных линейных неравенств к решению неравенств с параметрами может быть осуществлен следующим образом.

1) Решение линейных неравенств с одной переменной и положительным коэффициентом при этой переменной.

2) Решение линейных неравенств с одной переменной и отрицательным коэффициентом при этой переменной.

3) Решение неравенств с коэффициентом, равным нулю. В этом случае решение неравенства есть либо все множество действительных чисел, либо это множество пусто. Данный момент требует особенно пристального рассмотрения.

4) Рассмотрение простейших линейных неравенств с одним параметром.

Подобно определению линейного уравнения относительно указанной переменной, можно дать определение линейного неравенства.

Определение. Линейным неравенством относительно переменной x называется неравенство вида $kx \vee p$, где k и p — произвольные действительные параметры, а знак $\vee$ (или) — любой из знаков отношений $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\neq$.

Однако, в отличие от линейного уравнения того же вида, общее решение зависит не только от величины значений параметра, но и от его знака, что еще раз подтверждает «управляемость» параметром решением.

Решение неравенств можно представить в виде таблицы.

Таблица 3

	$kx > p$	$kx \geq p$	$kx < p$	$kx \leq p$
$k = 0, p = 0$	$\emptyset$	R	$\emptyset$	R
$k = 0, p > 0$	$\emptyset$	$\emptyset$	R	R
$k = 0, p < 0$	R	R	$\emptyset$	$\emptyset$
$k > 0$	$\left(\frac{p}{k}; +\infty\right)$	$\left[\frac{p}{k}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{p}{k}\right)$	$\left(-\infty; \frac{p}{k}\right]$
$k < 0$	$\left(-\infty; \frac{p}{k}\right)$	$\left(-\infty; \frac{p}{k}\right]$	$\left(\frac{p}{k}; +\infty\right)$	$\left[\frac{p}{k}; +\infty\right)$

Если значение параметра $k \neq 0$, то можно записать, что $kx - p = k\left(x - \frac{p}{k}\right)$, а это показывает, что двучлен $x - \frac{p}{k}$ обращается в нуль при $x = \frac{p}{k}$. Это число является корнем двучлена. Обозначая его

x_1 , получим, что $kx - p = k\left(x - \frac{p}{k}\right) = k(x - x_1)$.

Если $x > x_1$, то значения двучлена имеют тот же знак, что и знак параметра k , если же $x < x_1$, то значения двучлена противоположны знаку значения k .

Решение неравенств всегда представляет более сложное задание, нежели решение похожего класса уравнений. Поэтому параметрические неравенства на первом этапе изучения могут быть отнесены к группам В и С Единого государственного экзамена по математике.

Пример 12. Решите неравенство $m(x-1) > x-2$ относительно переменной x .

Решение. Выполним равносильные преобразования, приводящие неравенство к стандартному виду.

$$m(x-1) > x-2 \Leftrightarrow mx - m > x-2 \Leftrightarrow (m-1)x > m-2.$$

1) Если $m=1$, то неравенство примет вид $0 \cdot x > -2$, и его решением будет являться любое значение переменной x .

2) Если $m > 1$, то $(m-1)x > m-2 \Leftrightarrow x > \frac{m-2}{m-1}$.

3) Если $m < 1$, то $(m-1)x > m-2 \Leftrightarrow x < \frac{m-2}{m-1}$.

Ответ: при $m=1$ решением является любое значение переменной $x \in R$.

При $m > 1$ $\left(\frac{m-2}{m-1}; +\infty\right)$

При $m < 1$ $\left(-\infty; \frac{m-2}{m-1}\right)$.

Пример 13. Решите неравенство $\frac{mx+1}{3} + \frac{4m-x}{2} < \frac{m^2}{6}$.

Решение. Умножение обеих частей уравнения или неравенства на любое положительное число является равносильным преобразованием и, кроме того, не меняет знака соответствующего неравенства.

Умножим обе части неравенства на 6.

$$\begin{aligned} \frac{mx+1}{3} + \frac{4m-x}{2} < \frac{m^2}{6} &\Leftrightarrow 2(mx+1) + 3(4m-x) < m^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2mx + 2 + 12m - 3x < m^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2m-3)x < m^2 - 12m - 2. \end{aligned}$$

1) Если $m = \frac{3}{2}$, то неравенство приобретет вид $0 \cdot x < \frac{9}{4} - 12 \cdot \frac{3}{2} - 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x < -17\frac{3}{4}$, из чего следует, что решением не может являться ни одно значение переменной x . Таким образом, при $m = \frac{3}{2}$ неравенство решений не имеет.

2) Если $m > \frac{3}{2}$, то $(2m-3)x < m^2 - 12m - 2 \Leftrightarrow x < \frac{m^2 - 12m - 2}{2m-3}$.

3) Если $m < \frac{3}{2}$, то $(2m-3)x < m^2 - 12m - 2 \Leftrightarrow x < \frac{m^2 - 12m - 2}{2m-3}$.

Ответ. При $m = \frac{3}{2}$ неравенство решений не имеет.

$$\text{При } m > \frac{3}{2} \left(\frac{m^2 - 12m - 2}{2m - 3}; +\infty \right).$$

$$\text{При } m < \frac{3}{2} \left(-\infty; \frac{m^2 - 12m - 2}{2m - 3} \right).$$

Следующее неравенство следует отнести к группе С.

Пример 14. Решите неравенство $\frac{x}{m} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4m}$.

Решение. Заметим, что в данном случае параметр m может принимать не любые значения, а только значения, отличные от нуля. Таким образом, допустимыми значениями параметра является множество его значений $D_p = \{m | m \neq 0\}$. При $m = 0$ данное неравенство не имеет смысла.

$$\frac{x}{m} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4m} \Leftrightarrow \frac{x}{m} + \frac{1}{2} - \frac{3x}{2} > \frac{x}{4m} + \frac{1}{2m} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4m} - \frac{3}{2} \right) x > \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4m} - \frac{3}{2} \right) x > \frac{1-m}{2m} \Leftrightarrow \frac{3(1-2m)}{4m} x > \frac{1-m}{2m} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{m} x > \frac{2-2m}{3m}.$$

Умножение на m обеих частей неравенства — типичная ошибка, допускаемая учащимися. Хотя $m \neq 0$, однако параметр может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что, очевидно, существенным образом влияет на решение.

Вспомним определение параметра как «управляющей переменной», что особенно ярко проявляется именно при решении неравенств.

1) Если $m = \frac{1}{2}$, то неравенство приобретает вид $0 \cdot x > \frac{2}{3}$, и его решением не может служить ни одно значение переменной x .

2) Если $\frac{1-2m}{m} > 0$, т.е. когда $0 < m < \frac{1}{2}$, получим, что $\frac{1-2m}{m} x > \frac{2-2m}{3m} \Leftrightarrow x > \frac{2-2m}{3(1-2m)}.$

3) Если $\frac{1-2m}{m} < 0$, что равносильно тому, что $\begin{cases} m < 0, \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$, то

$$x < \frac{2-2m}{3(1-2m)}.$$

Ответ. При $m = \frac{1}{2}$ неравенство решений не имеет.

При $0 < m < \frac{1}{2} \left(\frac{2-2m}{3(1-2m)}; +\infty \right)$

При $m < 0$ или $m > \frac{1}{2} \left(-\infty; \frac{2-2m}{3(1-2m)} \right).$

Пример 15. Решите неравенство $\frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(m+1)}.$

Решение. Из условия следует, что параметр m может принимать любые значения, кроме -1 , т.е. область допустимых значений параметров $D_p = \{m | m \neq -1\}$. Учитывая это, преобразуем неравенство следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(m+1)} &\Leftrightarrow \frac{2x}{m+1} - \frac{1}{m+1} - \frac{x}{3} - \frac{2}{3} > \frac{x}{m+1} - \frac{5}{2(m+1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{m+1} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{3} \right) x > \frac{2}{3} - \frac{5}{2(m+1)} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{3} \right) x > \frac{4m+4-15}{6(m+1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2-m}{m+1} x > \frac{4m-11}{2(m+1)}. \end{aligned}$$

Умножение обеих частей неравенства на $m+1$ будет приводить к ошибке в решении.

1) Если $m = 2$, то неравенство приобретает следующий вид: $0 \cdot x > -\frac{1}{2}$, и обращается в верное числовое неравенство при любом значении переменной x .

2) Если $\frac{2-m}{m+1} > 0$, т.е. если $-1 < m < 2$, неравенство

$$\frac{2-m}{m+1}x > \frac{4m-11}{2(m+1)} \Leftrightarrow x > \frac{4m-11}{2(2-m)}.$$

3) Если $m < -1$ или $m > 2$, т.е. когда значения параметра удовлетворяют совокупности неравенств $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$, получим, что $\frac{2-m}{m+1} < 0$.

Тогда $\frac{2-m}{m+1}x > \frac{4m-11}{2(m+1)} \Leftrightarrow x < \frac{4m-11}{2(2-m)}.$

Ответ: Если $m = 2$ решением неравенства является любое значение переменной x .

Если $-1 < m < 2$ $\left(\frac{4m-11}{2(2-m)}; +\infty \right).$

Если $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$ $\left(-\infty; \frac{4m-11}{2(2-m)} \right)$

1.4. Линейное уравнение с двумя переменными.

График линейной функции

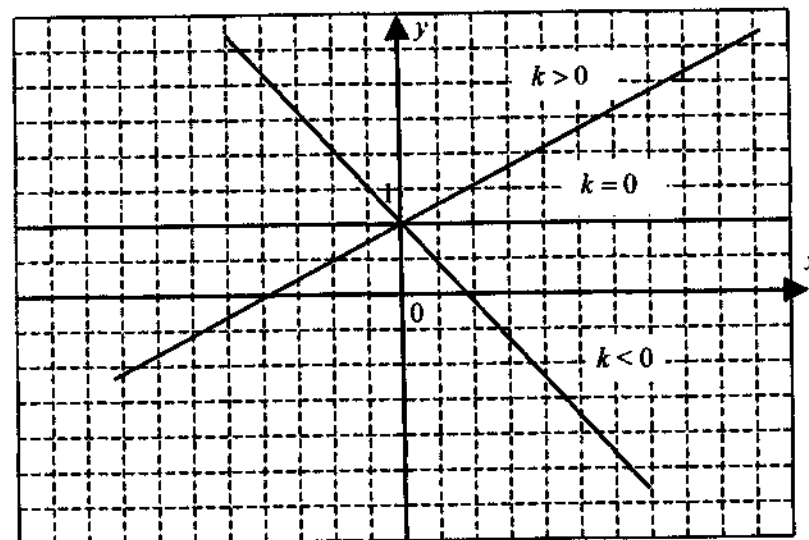
Определение. Линейной называется функция, задаваемая уравнением вида $y = kx + p$, где x — независимая переменная или аргумент, k и p — произвольные действительные параметры. Переменная y , значения которой находятся, называется зависимой переменной или значением функции.

Конечно, общий вид уравнения мало что может сказать о конкретном виде графика той или иной линейной функции. Из курса геометрии известно, что для того чтобы провести прямую линию на плоскости, достаточно задать две точки, принадлежащие этой прямой. Задавая конкретные значения параметров, мы выделяем из множества линейных функций одну или несколько, обладающих тем или иным свойством.

Множество функций, обладающих указанным свойством, принято называть семейством функций, а множество их графиков — семейством графиков (в частности, семейством прямых).

Зададим, например, $p = 1$. Из всего множества линейных функций выделится семейство функций, задаваемых уравнениями вида

$y = kx + 1$. Каким общим свойством будут обладать все графики данных функций? Заметим, что если задать значение $x = 0$, то каково бы ни было значение параметра k , значение y будет равно 1. Таким образом, уравнение $y = kx + 1$ задаст семейство прямых, не параллельных оси ординат и проходящих через точку $(0; 1)$.



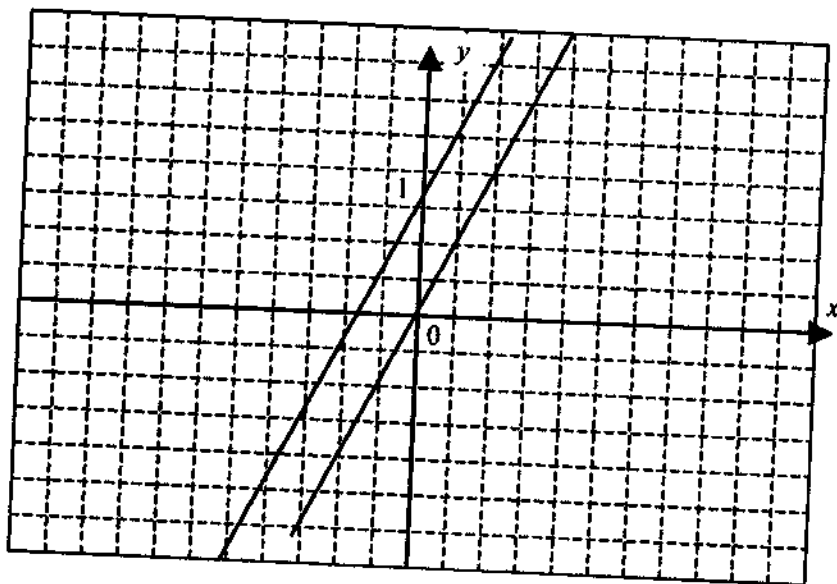
Теперь, напротив, зададим значение параметра k . Например, пусть $k = 2$. Тогда из всего множества линейных функций выделится семейство, задаваемое уравнениями вида $y = 2x + p$. Рассмотрим какие-нибудь два значения параметра p . Например, $p = 0$ и $p = 1$.

Из семейства функций выделится две отдельные линейные функции $y = 2x$ и $y = 2x + 1$.

Будем задавать различные значения независимой переменной x и вычислять получающиеся значения функции.

x	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-2	0	2	3	4
$y = 2x + 1$	-1	1	3	4	5

Если теперь построить графики этих функций, то получим две параллельные прямые.



И вообще, семейство прямых, являющихся графиками линейных функций, заданных уравнениями вида $y = 2x + p$ — есть семейство прямых, параллельных прямой, являющейся графиком линейной функции, заданной уравнением $y = 2x$.

Таким образом, получим:

1) Задавая конкретное значение параметра p , мы выделяем семейство линейных функций, графики которых проходят через точку $(0; p)$.

2) Задавая конкретное значение параметра k , мы выделяем семейство линейных функций, графики которых параллельны (или совпадают) прямой, уравнение которой $y = kx$. Заметим, что если в уравнениях $y = kx + p_1$ и $y = kx + p_2$ выполнено условие $p_1 \neq p_2$, то уравнения задают пару параллельных прямых.

3) Придавая конкретные значения обоим параметрам, мы выделяем единственную линейную функцию, обладающую обоими указанными свойствами.

Замечание. В дальнейшем, как это принято, будем говорить, что уравнения вида $y = kx + p$ не только задают множество линейных функций, то также задают множество прямых на координатной плоскости, не параллельных оси ординат.

Обычно то, что графиком линейной функции является прямая линия, некоторым образом «постулируется» и доказательство этого факта в курсе алгебры не проводится. Поэтому составление уравнения прямой, например, проходящей через две точки с заданными координатами, является для большинства учащихся достаточно трудной задачей. С другой стороны, составление уравнения другого ГМТ — окружности, проводится. В старшей школе проводится вывод уравнения плоскости в пространстве, и опять-таки отсутствует уравнение прямой.

1) Пусть даны две точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$. Докажем, что существует единственная линейная функция, уравнению которой будут удовлетворять координаты данных точек. Другими словами, покажем, что система уравнений

$$\begin{cases} kx_1 + p = y_1, \\ kx_2 + p = y_2 \end{cases}$$

будет иметь единственное решение относительно значений переменных k и p .

Действительно, определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$$

будет отличен от нуля, и поэтому утверждение будет верным.

Докажем обратное, т.е., что уравнение всякой прямой, не перпендикулярной оси абсцисс, будет линейным уравнением с двумя переменными, т.е. уравнением некоторой линейной функции.

Возьмем на прямой две различные фиксированные точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, а также произвольную точку $P(x; y)$. Векторы $\overrightarrow{MP}(x - x_1; y - y_1)$ и $\overrightarrow{MN}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ будут коллинеарными, и, следовательно, их координаты будут пропорциональны.

$$\text{Получим: } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением прямой линии. Легко видеть, что его можно записать в виде линейного уравнения $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$, что доказывает утверждение.

Пример 16. Составьте уравнение линейной функции, график которой проходит через точки $M(2; 3)$ и $N(5; 7)$.

Решение. Составить уравнение линейной функции — это значит, составить уравнение, связывающее координаты произвольной точки $P(x; y)$ с координатами данных точек. Используя каноническое уравнение прямой, имеем:

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{7-3} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Ответ: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$

Пример 17. Найдите все значения параметра t , при котором три точки M, N, K с координатами $(1; 1), (8; 2), (7t+29; 2t-1)$ соответственно лежат на одной прямой.

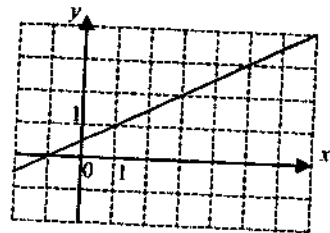
Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки M и N .

$\frac{x-1}{8-1} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}.$ Так как точка K также принадлежит данной прямой, то ее координаты являются решениями полученного линейного уравнения.

$$2t-1 = \frac{1}{7}(7t+29) + \frac{6}{7} \Leftrightarrow 2t-1 = t+5 \Leftrightarrow t=6.$$

Ответ: 6.

Пример 18. Определите, график какой линейной функции изображен на рисунке.



1) $y = \frac{x+1}{2}$ 2) $y = \frac{x-1}{2}$ 3) $y = \frac{-x+1}{2}$ 4) $y = \frac{-x-1}{2}$

Решение. По рисунку определяем, что прямая проходит через точки с координатами $(-1; 0)$ и $(1; 1)$. Составим ее уравнение.

$$\frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{y-0}{1-0} \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{2}.$$

Номер правильного ответа 1).

Ответ: номер правильного ответа 1).

В экономике одним из наиболее часто используемых понятий является функция спроса — функция, задающая зависимость количества проданного товара от его цены. Естественно, при этом считается, что весь товар одинаков.

Пример 19. Функция спроса на пирожки является линейной функцией, причем спрос равен 31 пирожку при цене 6 рубля за пирожок и 13 пирожков при цене 12 рублей за пирожок. Сколько пирожков будет куплено по цене 11 рублей за пирожок?

Решение. Обозначим количество пирожков, купленных по цене 11 рублей за пирожок, p . Таким образом, задача сведется к предыдущему случаю: надо найти значение параметра p , при котором точки с координатами $(31; 6), (13; 12), (p; 11)$ будут лежать на одной прямой.

Так как прямая проходит через первые две точки, то ее уравнение будет иметь вид:

$$\frac{x-31}{13-31} = \frac{y-6}{12-6} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x-31) + 6.$$

Подставляя координаты третьей точки, получим:

$$11 = -\frac{1}{3}(p-31) + 6 \Leftrightarrow p-31 = 18-33 \Leftrightarrow p=16.$$

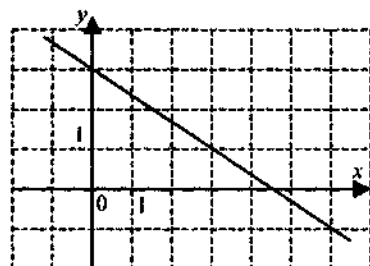
Ответ: 16.

2) Из канонического уравнения прямой получаем, что значение углового коэффициента k в уравнении прямой $y = kx + p$, проходящей через две точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

и численно равно значению тангенса угла, образованного данной прямой с положительным направлением оси OX .

Пример 20. Определите угловой коэффициент прямой, изображенной на рисунке.



- 1) $\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $-\frac{3}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

Решение. По рисунку определяем, что график проходит через точки $(0; 3)$ и $(3; 1)$. Вычислим угловой коэффициент: $k = \frac{1-3}{3-0} = -\frac{2}{3}$.

Номер правильного ответа — 2).

Ответ: 2.

3) Так как параллельные прямые образуют с любой секущей одинаковые соответственные углы, то две параллельные прямые образуют одинаковые углы и с осью абсцисс. Следовательно, угловые коэффициенты двух параллельных прямых одинаковы. Считается, что если прямая параллельна оси OX или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент принимается равным 0.

Пример 21. Определите значение параметра k , при котором прямая $y = kx + 2$ параллельна прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 1$.

- 1) $\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $-\frac{3}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

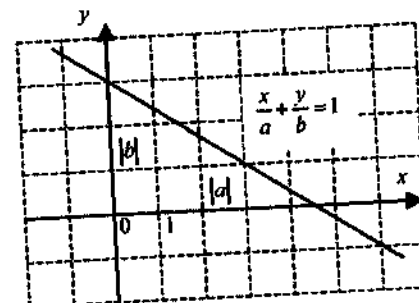
Решение. Представим уравнение второй прямой следующим образом: $3x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Следовательно, $k = -\frac{3}{2}$, и номер правильного ответа — 3).

Ответ: 3.

4) Если прямая не параллельна ни одной из осей координат и не проходит через начало координат, то она пересекает оси и отсекает на них некоторые отрезки с началом в начале координат.

Пусть уравнение прямой $ax + by = c$, $abc \neq 0$. Неравенство равносильно условию, сформулированному выше. Деля уравнение на c , запишем полученное уравнение в виде $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$, где $a' = \frac{c}{a}$, $b' = \frac{c}{b}$.

Полученное уравнение называется «уравнением прямой в отрезках», т.к. абсолютные величины $|a'|$ и $|b'|$ равны длинам отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.



Пример 22. Найдите величину площади треугольника, образованного отрезком прямой $3x + 4y = 12$ и отрезками осей координат.

Решение. Запишем уравнение прямой «в отрезках».

$3x + 4y = 12 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Площадь треугольника с катетами 3 и 4 равна 12.

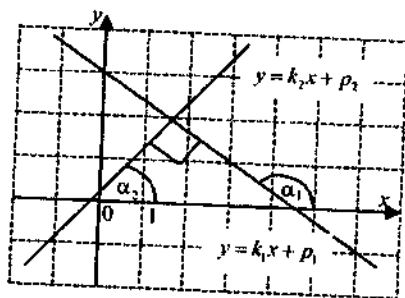
Ответ: 12.

5) Если прямая параллельна оси абсцисс, то ее уравнение имеет вид $y = c$, а прямая, перпендикулярная ей, т.е. параллельная оси ординат, имеет вид $x = p$.

В том случае, если прямая не параллельна оси абсцисс, то и перпендикулярная ей прямая не параллельна ей. Пусть уравнение первой

прямой $y = k_1x + p_1$, а уравнение перпендикулярной ей прямой $y = k_2x + p_2$. Легко проверить, что в этом случае $k_1 \cdot k_2 = -1$, так как углы, образованные данными прямыми с положительным направлением оси абсцисс, связаны соотношением: $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_2$, а, следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_2.$$



Пример 23. Найдите сумму значений параметра a , при которых прямые, заданные уравнениями $y = (a+7)x + 5a - 7$ и $y = (a+3)x + 7a - 5$, перпендикулярны.

Решение. Искомые значения параметра являются решениями квадратного уравнения $(a+1)(a+3) = -1$, что следует из условия их перпендикулярности. Имеем $(a+7)(a+3) = -1 \Leftrightarrow a^2 + 10a + 20 = 0$. Дискриминант уравнения положителен, поэтому воспользуемся теоремой Виета: сумма искомых значений равна -10 .

Ответ: -10 .

Пример 24. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 3)$ перпендикулярно прямой, заданной уравнением $3x + 5y = 1$.

Решение. Записав уравнение данной прямой как

$$3x + 5y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5},$$

получаем, что угловой коэффициент искомой прямой $k = \frac{5}{3}$. Тогда

уравнение искомой прямой возможно представить в виде: $y = \frac{5}{3}x + p$.

Значение параметра p определим из условия, что график этой линейной функции проходит через точку $M(2; 3)$.

$$3 = \frac{10}{3} + p \Leftrightarrow p = -\frac{1}{3}.$$

Получаем, что искомое уравнение имеет вид:

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3y = 5x - 1 \Leftrightarrow 5x - 3y - 1 = 0.$$

Ответ: $5x - 3y - 1 = 0$.

1.5. Расстояние от точки до прямой

Как известно из геометрии, расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую линию.

Пусть дана некоторая точка $M(x_0; y_0)$ и прямая, заданная уравнением $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$. Уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку M , будет иметь вид $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0$. Найдём координаты точки их пересечения, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ bx - ay = bx_0 - ay_0 \end{cases}$$

$$\text{Определитель системы } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 = -(a^2 + b^2).$$

Вычислим частные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -c & b \\ ay_0 - bx_0 & -a \end{vmatrix} = ac - b(bx_0 - ay_0),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & -c \\ b & ay_0 - bx_0 \end{vmatrix} = a(bx_0 - ay_0) + bc.$$

Таким образом, координаты точки пересечения рассматриваемых прямых будут равны

$$\begin{cases} x = -\frac{ac - b(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2}, \\ y = -\frac{bc + a(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Соответственно:

$$\begin{cases} x - x_0 = -\frac{ac - b(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2} - x_0, \\ y - y_0 = -\frac{bc + a(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2} - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = \frac{-ac - aby_0 - a^2x_0}{a^2 + b^2}, \\ y - y_0 = \frac{-bc - abx_0 - b^2y_0}{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = \frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}, \\ y - y_0 = \frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Находя расстояние, получим:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 25. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $y + x - 6\sqrt{2} = 0$.

Решение. Начало координат — точка $O(0; 0)$. Поэтому искомое расстояние будет равно $d = \frac{|-6\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 6$.

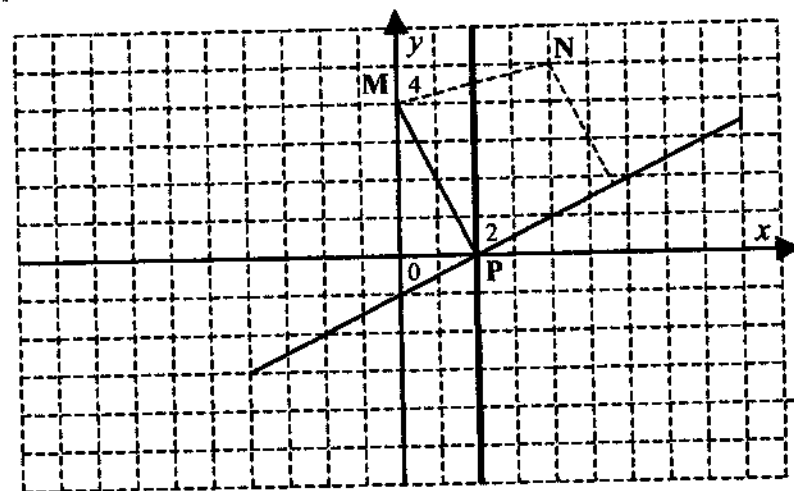
Ответ: 6.

Формула расстояния от точки до прямой находит применение в более сложных задачах.

Пример 26. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x - 2y - 2| = 2\sqrt{5}, \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x; y)$ — координаты некоторой точки плоскости. Тогда уравнение системы — сумма расстояний от этой точки до точки $M(0; 4)$ и прямой, заданной уравнением $x - 2y - 2 = 0$. Заметим еще, что правая часть уравнения равна расстоянию от точки M до указанной прямой. Множество точек плоскости, обладающих данным свойством — перпендикуляр, проведенный из точки M на прямую. Очевидно, что для любой точки N , не принадлежащей этому перпендикуляру, сумма расстояний до точки M и до прямой будет больше. Проведем перпендикуляр MP .



Точка P — основание перпендикуляра будет иметь координаты $(2; 0)$. Учитывая неравенство системы, получим, что только ее координаты будут являться искомыми решениями всей системы.

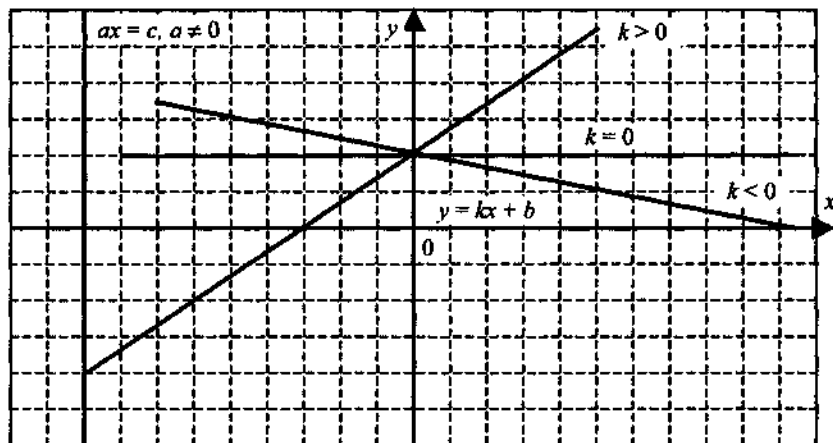
Ответ: $(2; 0)$

1.6. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Исследование решений уравнений степени не выше первой с одной переменной может быть продолжено исследованием систем линейных уравнений с двумя переменными.

Определение. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$, т.е. значение хотя бы одного из параметров должно быть отлично от нуля.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая линия. Доказательство этого факта «чудесным» образом выпало из УМК по алгебре, несмотря на то, что это один из основополагающих фактов всего курса.



Кроме того, соотнесение формального уравнения и геометрического места точек плоскости — один из самых важных шагов в развитии мышления учащихся. А в учебниках об этом сообщается не как о громадном достижении, а буднично, как будто это и так ясно и понятно всем.

Определение. Системой двух линейных уравнений с двумя переменными называется система вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа, причем $a_1^2 + b_1^2 > 0$ и $a_2^2 + b_2^2 > 0$.

Определение. Решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара значений этих переменных, обращающая в верное числовое равенство каждое уравнение системы.

Традиционным методом решения систем уравнений (не только линейных, но и других) является метод последовательного исключения переменных.

Метод последовательного исключения переменных состоит в следующем.

Пусть пара чисел (x_0, y_0) — решение данной системы. Подставляя эти значения в уравнения системы, получим верные числовые равенства, что следует из определения решения: $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$.

Числовое равенство не изменится, если обе его части одновременно умножить на любое, отличное от нуля число или к обеим частям прибавить равные числа.

Исключая y_0 из первого уравнения, мы приводим систему равенств к виду $\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x_0 = c_1b_2 - c_2b_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$, из которого следует, что пара чисел (x_0, y_0) является решением системы $\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Исключая x_0 , получим $\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)y_0 = a_1c_2 - a_2c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$, откуда следует, что та же пара чисел (x_0, y_0) — решение системы $\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Очевидно, что если (x_0, y_0) — решение одной из получившихся систем, то эта же пара чисел — решение исходной системы. Заметим, что коэффициент при остающейся переменной одинаков. Таким образом, мы приходим к методу Крамера или методу определителей решения систем линейных уравнений.

Определение. Определителем системы линейных уравнений называется число, равное $a_1b_2 - a_2b_1$ и записываемое в виде $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

При этом правые части уравнений, содержащих одну оставшуюся переменную, также можно записать в виде определителей:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \text{ и } \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

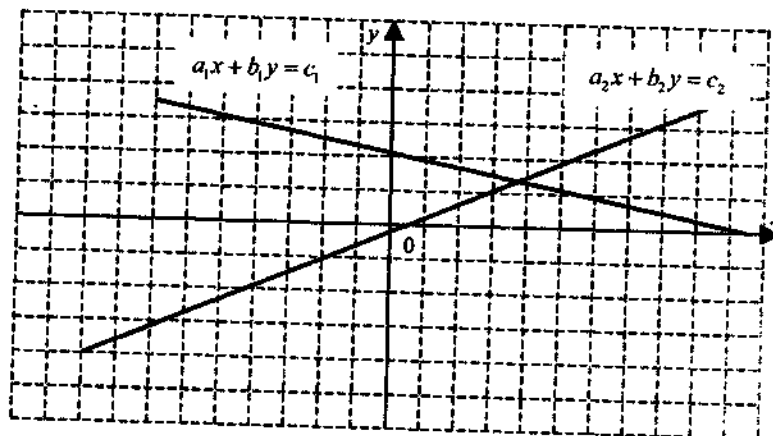
Метод Крамера является наиболее удобным для исследования систем линейных уравнений.

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$$

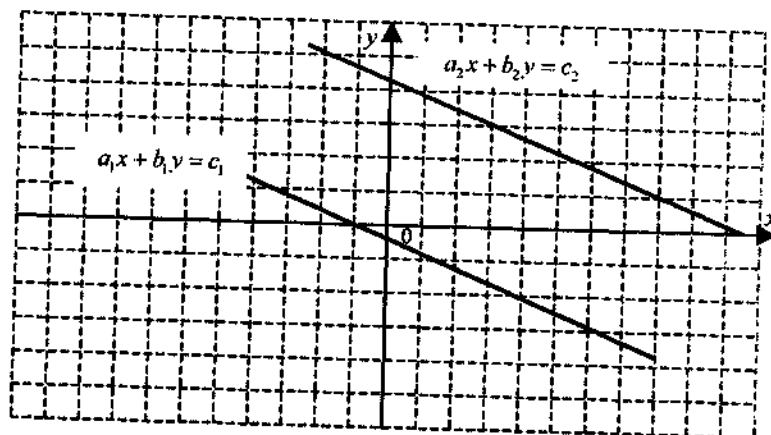
Эти формулы носят название формул Крамера.

Геометрический смысл единственности решения состоит в том, что прямые, задаваемые уравнениями системы, пересекаются в одной точке.



2. $\Delta = 0$. Если при этом $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 > 0$, то система решений не имеет.

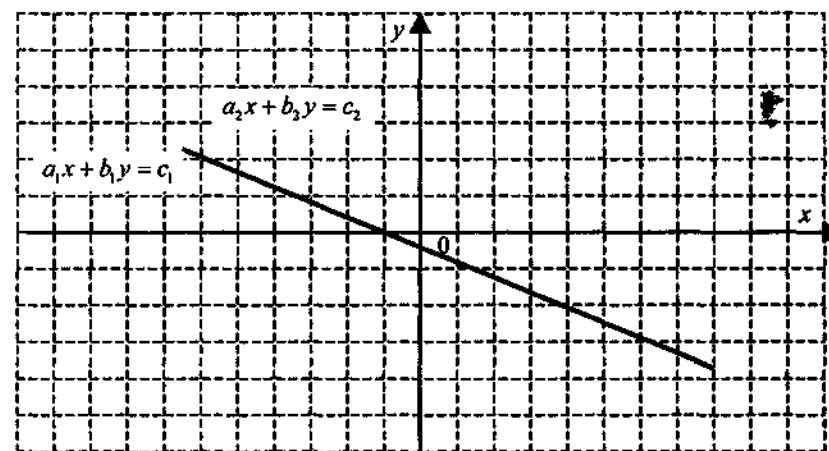
Геометрически это означает, что прямые, задаваемые уравнениями системы, параллельны.



3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество

решений вида
$$\begin{cases} x = x_0, x_0 \in R \\ y = \frac{c_1 - a_1 x_0}{b_1} \end{cases}$$

В этом случае оба уравнения системы задают на плоскости одну прямую, координаты точек которой и будут являться решениями данной системы.



Рассмотрим примеры решения систем линейных уравнений.

При решении уравнений, систем уравнений, неравенств можно избежать дополнительных пояснений, условно разделив лист на две — «аналитическую» и «расчетно-графическую» части. В аналитической части листа ведутся аналитические равносильные преобразования, приводящие исходную задачу от условия до аналитической записи ответа. В расчетно-графической, параллельно аналитическим выкладкам, делаются замены переменных, вычисления, графические иллюстрации, приводятся комментарии и т.п. При решении систем уравнений это может выглядеть, например, так.

Пример 27. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x + 11y = 13 \end{cases}$$

Решение.

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x + 11y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -9 \end{cases}$	$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 21 = 1$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 39 = 16$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 35 = -9$
---	---

Ответ: (16; -9)

Пример 28. Найдите сумму решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$$

Варианты ответов: 1) 2, 2) 3, 3) 4, 4) 5.

Решение. Решим систему методом исключения переменных. Заменяя второе уравнение суммой уравнений, получим, что

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ -x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 9, \\ 5y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 3y, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 \end{cases}$$

Сумма решений равна 3.

Ответ: 2.

Пример 29. Найдите разность $x - y$, где $(x; y)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3,563x + 7,124y = 16 \\ 1,563x + 9,124y = 12 \end{cases}$$

Варианты ответов: 1) 3, 2) 4, 3) 2, 4) 1.

Решение.

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$2x - 2y = 4 \Leftrightarrow x - y = 2.$$

Ответ: 3

Пример 30. Найдите модуль разности $|x - y|$, где x, y — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 3x - 2y = -17 \end{cases}$$

Варианты ответов: 1) 0, 2) 3, 3) 2, 4) 1.

Решение. Найдём определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-15) = 11,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -17 & -2 \end{vmatrix} = -14 - 85 = -99,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -17 \end{vmatrix} = -66$$

Найдём решение системы

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-99}{11} = -9, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -6, |x - y| = 3.$$

Ответ: 2

Пример 31. Сумма цифры единиц и цифры десятков двузначного числа равна 12. Цифра десятков в 12 раз меньше самого числа. Найдите число.

Решение. Обозначим x — цифра единиц, а y — цифра десятков искомого числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 12y = 10y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 12y = 10y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 12, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 8 \end{cases}$$

Искомое число — 48.

Ответ: 48.

Пример 32. Натуральное двузначное число в 5 раз больше суммы его цифр. Если к числу прибавить 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Решение. Обозначим x — цифра единиц, а y — цифра десятков искомого числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 10y + x = 5(x + y), \\ 10y + x + 9 = 10x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y + x = 5(x + y), \\ 10y + x + 9 = 10x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4 \end{cases}$$

Искомое число — 45.

Ответ: 45.

В следующих примерах мы предполагаем, что учащиеся имеют некоторое представление о решении квадратных уравнений и неравенств, и переходим к исследованию решений системы линейных уравнений с двумя переменными.

Пример 33. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$ не имеет решения.

Решение. Найдем определители системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -4 \\ 2 & a+6 \end{vmatrix} = a^2 + 6a + 8.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+1 & -4 \\ a+3 & a+6 \end{vmatrix} = a^2 + 7a + 6 - (-4)(a+3) = a^2 + 11a + 18$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} = a(a+3) - 2(a+1) = a^2 + a - 2.$$

Система не будет иметь решения в том случае, когда определитель системы равен нулю, а хотя бы один из частных определителей системы отличен от нуля. Искомые значения параметра задаются системой $\begin{cases} a^2 + 6a + 8 = 0, \\ (a^2 + 11a + 18)^2 + (a^2 + a - 2)^2 > 0. \end{cases}$

Решим уравнение $a^2 + 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -4 \end{cases}$. Подставим полученные значения в систему.

$\begin{cases} a = -4 \\ (-10)^2 + (10)^2 > 0 \end{cases}, \begin{cases} a = -2 \\ (0)^2 + (0)^2 = 0 \end{cases}$. Таким образом, при $a = -4$ система решений не имеет.

Ответ: -4 .

Пример 34. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = 4a - a^2 - a = 3a - a^2,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+2 & a \\ 2a+4 & 2a \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a+2 \\ a+1 & 2a+4 \end{vmatrix} = 4a + 8 - a^2 - 3a - 2 = -a^2 + a + 6.$$

Так как система должна иметь бесконечное множество решений, то искомые значения параметра задаются системой

$$\begin{cases} 3a - a^2 = 0, \\ -a^2 + a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Ответ: 3 .

Пример 35. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2ax + y = a + 1, \\ x + 3ay = a + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 3a \end{vmatrix} = 6a^2 - 1.$

Искомые значения параметра задаются неравенством $6a^2 - 1 \neq 0$.

$$6a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} < a < \frac{1}{\sqrt{6}} \\ a > \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

Ответ: при $\forall a \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$ система имеет единственное решение.

Пример 36. Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ -6x + 3y = -15. \end{cases}$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6a, \Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -a \\ -15 & 3 \end{vmatrix} = -15(1+a), \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: при $a=1$ система решений не имеет, а при $a \neq 1$ система имеет единственное решение $\left(\frac{5(a+1)}{2(a-1)}; 0\right)$

Пример 37. Числа a и b таковы, что система уравнений $\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$ имеет единственное решение $x=1, y=1$. Найдите эти числа.

Решение. Используя определение решения и условие его единственности, получим, что искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 - a, \\ b + 3 - 2b = 3 + a, \\ a^2(3 + 2b) + ab \neq 0 \end{cases} \quad \text{Имеем} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = -1, \\ 1 + (-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1)$.

1.7. Линейное неравенство с двумя переменными

Определение. Неравенство вида $F(x; y) < 0$ называется неравенством с двумя переменными x и y . Решением данного неравенства является множество упорядоченных пар чисел $(x; y)$, обращающих неравенство в верное числовое неравенство.

Решить неравенство $F(x; y) < 0$ в большинстве случаев можно лишь графически, указав геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих неравенству, и найдя значения искомой переменной при каждом допустимом значении независимой переменной. Сформулируем теорему подобную методу интервалов на числовой прямой.

Метод областей на плоскости

Если уравнение $F(x; y) = 0$ определяет некоторую линию, то множество точек плоскости, не лежащих на этой кривой, состоит из некоторого конечного числа областей $G_1, G_2, \dots, G_n$, на которые данная кривая и кривые, на которых уравнение теряет смысл, разбивают плоскость. В каждой точке этих областей выражение $F(x; y)$ определено и отлично от нуля, т.е. в каждой из областей $G_k, k = 1, 2, \dots, n$, на которые указанные кривые разбивают плоскость, выражение $F(x; y)$ либо положительно, либо отрицательно.

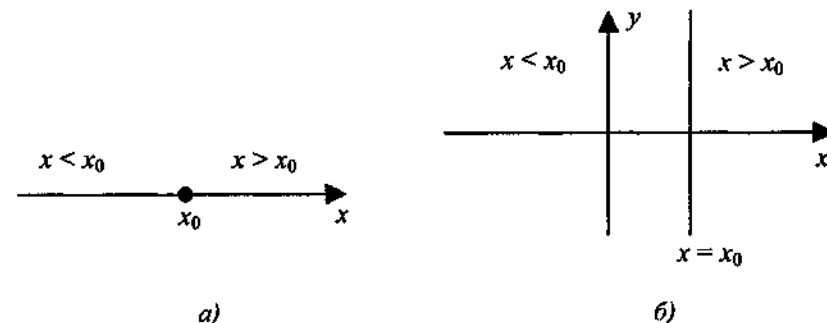
Простейшей кривой на плоскости является прямая линия, разбивающая плоскость на две части — полуплоскости.

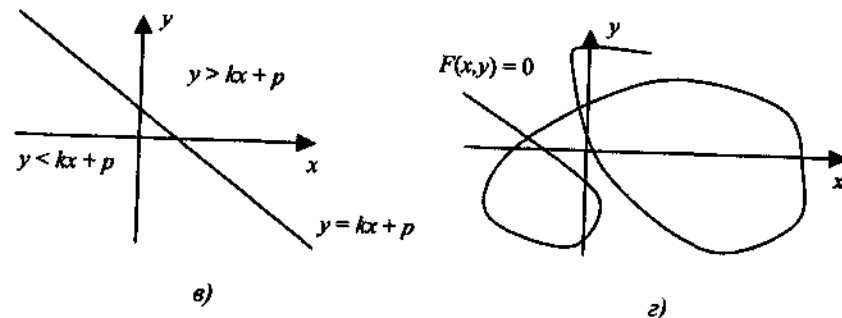
1. Точка x_0 числовой прямой разбивает ее на два интервала, в любой точке каждого из которых выполняется только одно неравенство — либо $x > x_0$, либо $x < x_0$ (рис. а).

2. Всякая прямая координатной плоскости, заданная уравнением $x = x_0$ разбивает плоскость на две части, в каждой точке одной из которых выполняется неравенство $x > x_0$, а в другой — неравенство $x < x_0$ (рис. б).

3. Всякая прямая линия, заданная уравнением $y = kx + p$, разбивает координатную плоскость на две части, в каждой точке первой из которых выполняется неравенство $y > kx + p$, а в каждой точке второй выполняется неравенство $y < kx + p$ (рис. в).

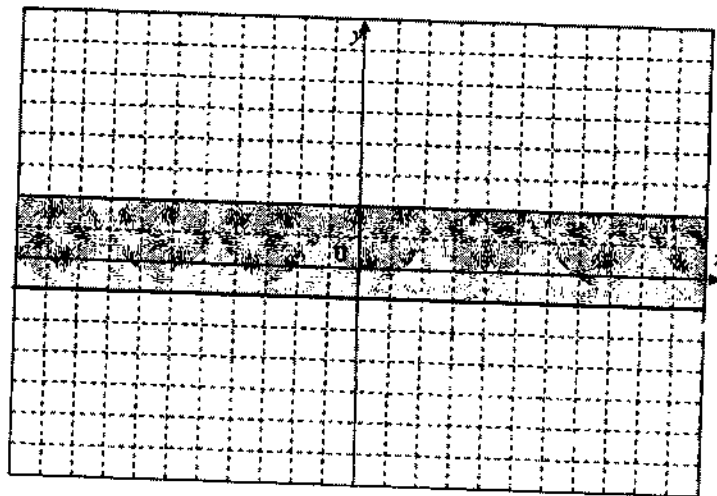
4. Всякая кривая линия, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, разбивает координатную плоскость на области, в каждой из которых для всех точек этой области выполняется только одно из неравенств — либо $F(x, y) > 0$, либо $F(x, y) < 0$ (рис. г).





Пример 38. Изобразите множество точек координатной плоскости, принадлежащих множеству прямых, заданных уравнениями $y = p$, $-1 \leq p \leq 2$.

Решение. Так как значение параметра $k=0$, то множество данных прямых — семейство прямых, параллельных оси абсцисс и проходящих через точку $(0; p)$, $-1 \leq p \leq 2$.

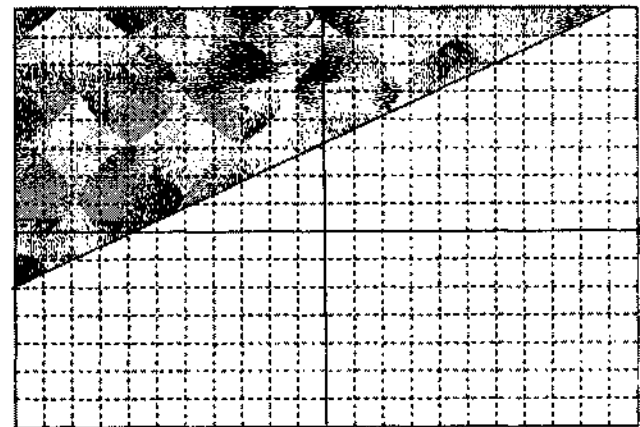


Рассмотрим еще одно свойство графика линейной функции. Множество точек, принадлежащих прямой, удовлетворяет уравнению $y = kx + p$.

Пример 39. Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq \frac{1}{2}x + 3$

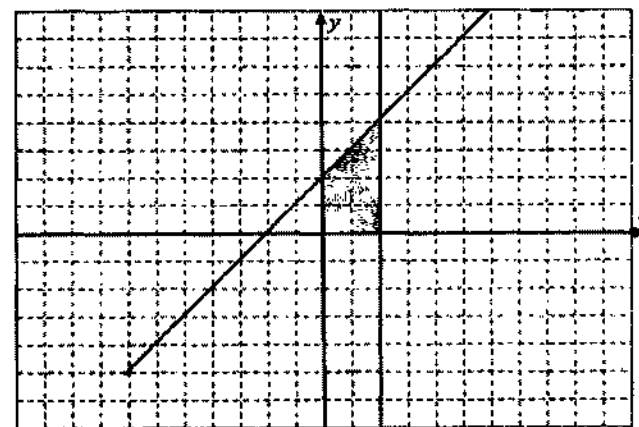
Решение. Построим прямую, заданную уравнением $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Прямая разбивает плоскость на две части — левую «верхнюю» и правую «нижнюю». Точки, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, лежат выше данной прямой.

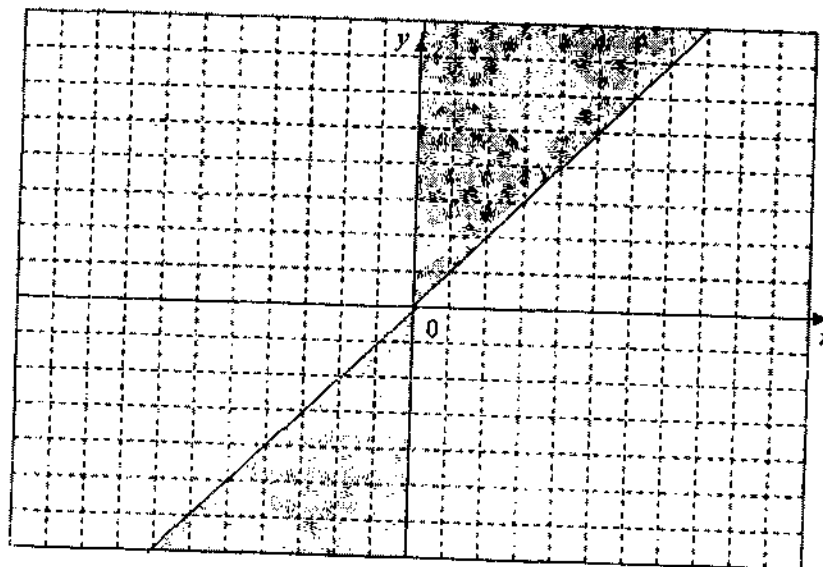


Пример 40. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x+1 \end{cases}$

Решение. Искомое множество — это множество точек координатной плоскости, ограниченное осями координат, прямыми, заданными уравнениями $x=1$ и $y=x+1$.



Пример 41. Изобразите множество точек координатной плоскости, принадлежащих семейству прямых, заданных уравнениями $y = (a^2 + 1)x$.

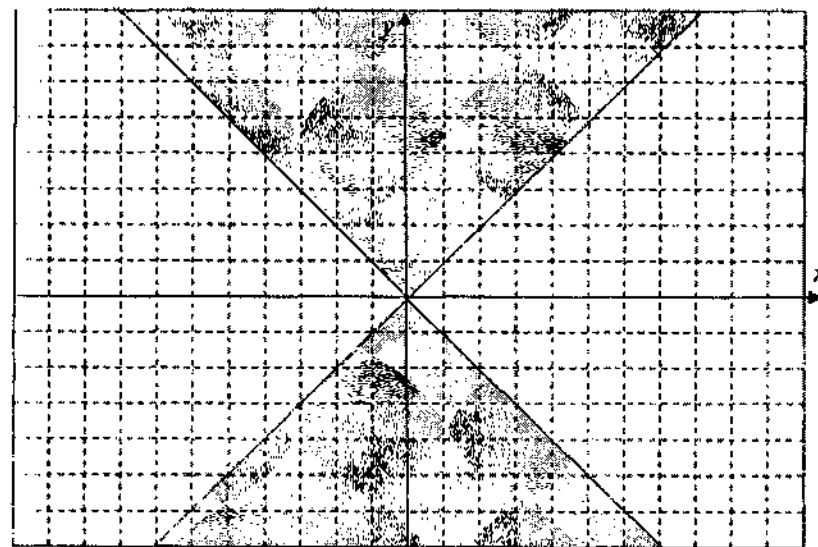


Решение. Любая прямая, заданная подобным уравнением, будет проходить, как легко видеть, через начало координат. С другой стороны, при $x = 1$ получим, что $y = a^2 + 1$, т.е. прямые будут проходить через точки с абсциссой, равной 1, и ординатами, не меньшими 1. Множество точек, принадлежащих этим прямым, изображено на рисунке.

Пример 42. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - x^2 \geq 0$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства. $y^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) \geq 0$

Построим прямые, заданные уравнениями $y = x$ и $y = -x$, которые являются границами искомого множества. Они разбивают координатную плоскость на четыре части, две из которых содержат точки, координаты которых отвечают условию задачи.



Пример 43. В двух бригадах работает более 27 человек. Число рабочих первой бригады более чем в два раза превосходит число рабочих второй бригады, уменьшенное на 12. Число рабочих второй бригады более чем в 9 раз превосходит число рабочих первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько рабочих в каждой бригаде?

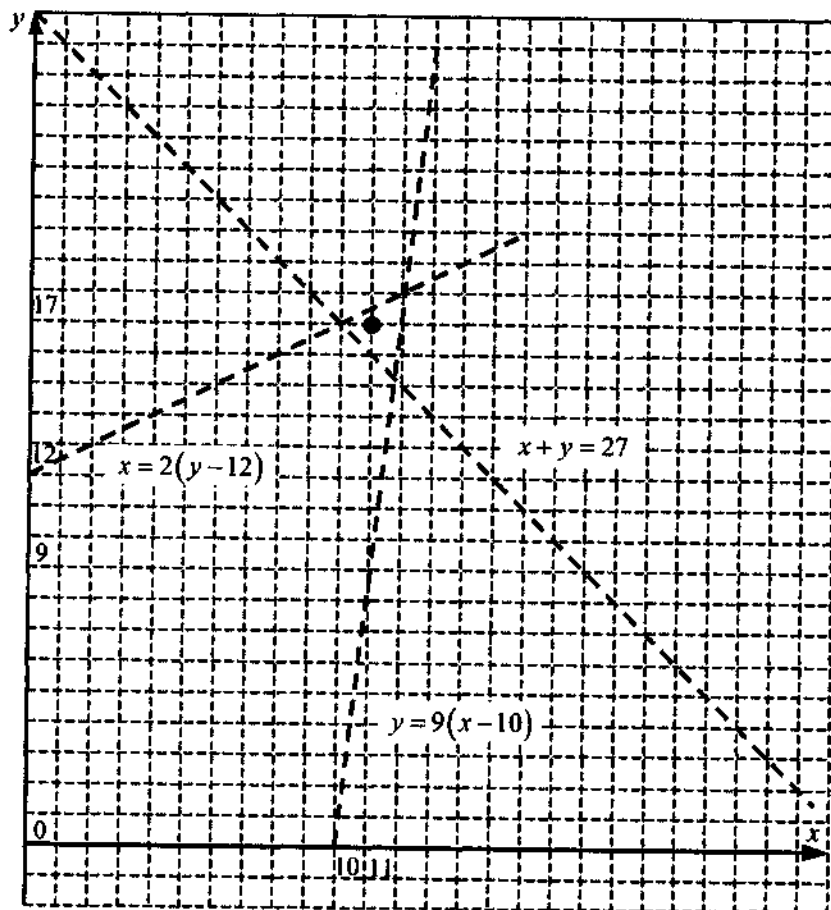
Решение. Основной идеей решения является тот ясный факт, что число рабочих каждой бригады — натуральное число.

Таким образом, нас будут интересовать только точки с целочисленными координатами, лежащие во множестве точек, заданных условием задачи.

Построим геометрическое место точек, задаваемое неравенствами:

$$\begin{cases} x + y > 27 \\ y > 9(x - 10), \\ x > 2(y - 12) \end{cases}$$

Искомое ГМТ — треугольник, внутри которого лежит единственная точка с целочисленными координатами (11; 17).



Аналитическое решение. Основным условием нахождения аналитического решения задачи является целочисленность переменных.

$$\text{Имеем: } \begin{cases} x + y > 27, \\ y > 9(x - 10), \\ x > 2(y - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 27 - x, \\ y < \frac{x}{2} + 12, \\ y > 9(x - 10) \end{cases}$$

Из второго и третьего неравенств данной системы получим, что $9x - 90 < y < \frac{x}{2} + 12$.

Следовательно, $9x - \frac{x}{2} < 102 \Leftrightarrow \frac{17}{2}x < 102 \Leftrightarrow x < 12$. Так как количество рабочих каждой бригады — натуральное число, то $x \leq 11$. С другой стороны, т.к. $y > 9(x - 10) > 0$, то, по крайней мере, $x > 10$. Таким образом, $x = 11$. Из первых двух неравенств получим, что $16 < y < 17,5$. Следовательно, $y = 17$.

Ответ: число рабочих первой бригады — 11 человек, а второй бригады — 17 человек.

1.8. Уравнения и неравенства, приводимые к линейным уравнениям

Формирование навыков исследования может быть продолжено при исследовании простейших нелинейных уравнений, приводящихся к рассмотрению систем уравнений или смешанных систем линейных уравнений и неравенств.

Пример 44. Решите уравнение $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 1$.

Решение. Данное уравнение сводится к равносильной ему системе: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$.

Ответ: -1.

Пример 45. Решите уравнение $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$.

Решение. Уравнение также сводится к равносильной системе $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3, \\ x + 3 = x + 3 \end{cases}$.

Решением полученной системы является любое значение переменной, кроме одного, т.е. кроме $x = 3$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

Пример 46. Решите уравнение $\frac{2x - 13}{2x - 16} + \frac{2(x - 6)}{x - 8} = \frac{7}{8} + \frac{2(5x - 39)}{3x - 24}$.

Решение. Данное уравнение в точном смысле определения не является линейным, однако приводится к решению такого на множестве допустимых значений переменной x .

Избавление от знаменателя, т.е. умножение обеих частей уравнения на выражение, зависящее от переменной, могло бы быть ошибкой. Поэтому выполним преобразования, не меняющие множество определения данного уравнения.

$$\begin{aligned} \frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} &= \frac{7}{8} + \frac{2(5x-39)}{3x-24} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{12(2x-13) + 48(x-6) - 21(x-8) - 16(5x-39)}{24(x-8)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{24x-156+48x-288-21x+168-80x+624}{24(x-8)} &= 0 \Leftrightarrow \frac{348-29x}{24(x-8)} = 0. \end{aligned}$$

По определению, дробь равна нулю только в том случае, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Поэтому полученное уравнение будет равносильно системе

$$\begin{cases} 29x = 348, \\ x \neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ x \neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 47. Решите уравнение $\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x}$.

Решение. При выполнении преобразований выражений, не являющихся тождественными, очень часто меняется множество допустимых значений переменной, входящей в эти выражения.

В частности, если формально провести преобразование левой части уравнения, то получим следующее:

$$\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)}}{\frac{1+x-1+x}{1-x}} = \frac{4x(1-x)}{2x(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1+x}.$$

Выражение, стоящее в левой части исходного уравнения, имеет смысл при любом значении $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$,

а «тождественно» преобразованное при любом значении $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Поэтому при решении подобных уравнений надо позаботиться о равносильности проводимых преобразований.

$$\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 14, \\ \frac{2}{x+1} = \frac{3}{14-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \\ x \neq 14, \\ 5x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

1.9. Задачи, использующие график линейной функции

Использование чертежа при решении геометрических задач является неотъемлемой частью этого решения. Построение чертежа повышает наглядность условия задачи, позволяет легче находить связи между данными и искомыми величинами задачи. То же самое мы наблюдаем в физике. А вот использование чертежа в алгебре является достаточно редким явлением. Обычно и в этом случае ограничиваются одномерной моделью математической задачи. Выход в плоскость — редкость, но хочется, чтобы это стало правилом.

Из физики известно, что закон изменения пройденного пути при равномерном движении задается линейной функцией $S(t) = V(t - t_0)$. Как известно, графиком линейной функции является прямая линия. При этом величина средней или постоянной скорости движения выступает в качестве углового коэффициента, т.е. равна тангенсу угла наклона соответствующей прямой к оси t .

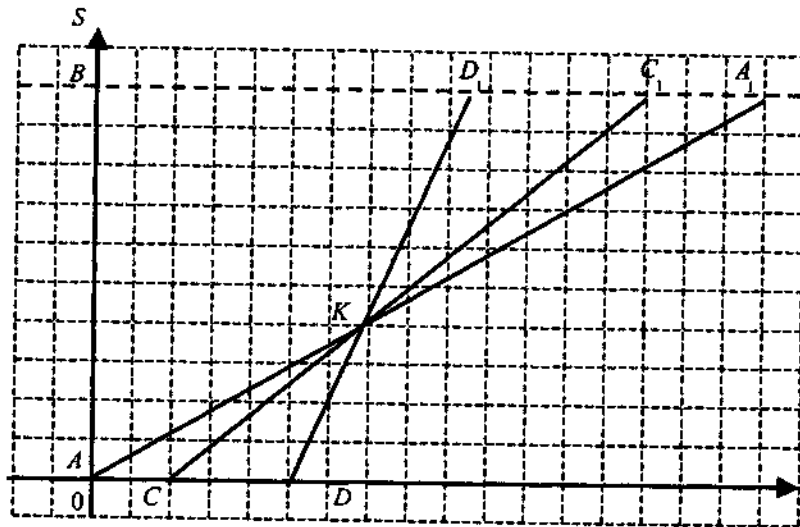
Есть еще одна замечательная особенность в решении физических задач — некоторые величины в любой из них считаются известными, которые могут быть определены по таблицам и т.д.

Пример 48. Из пункта A в пункт B выехала грузовая машина, а через полчаса за ней в том же направлении выехала легковая машина.

Еще через час следом за ними выехал мотоциклист, который обогнал обе машины в тот момент, когда машины поравнялись. Мотоциклист прибыл в пункт B на 1 час раньше грузовой машины. Через какое время после прибытия мотоциклиста в пункт B туда пришла легковая машина?

Спрашивается: сколько и каких переменных надо ввести, чтобы составить математическую модель данной задачи? Ответ парадоксален — переменные вообще не потребуются! Воспользуемся графической моделью условия задачи.

Решение. Изобразим графики пути, пройденных автомобилями в единой системе координат. Так как в некоторый момент времени все автомобили встретились, то графики пересекаются в одной точке, которая обозначена K .



Дальнейший ход решения прост: из подобия треугольников AKD и A_1KD_1 получим, что $\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{DK}{KD_1}$. А из подобия треугольников CKD и C_1KD_1 следует, что $\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DK}{KD_1}$.

Следовательно, получим, что $\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Алгебраический смысл каждого из отрезков, входящих в данную пропорцию, состоит

в том, что каждый из них равен какому-то временному интервалу между моментами выезда или моментами прибытия соответствующих машин.

Из условия следует, что

$$AD = \frac{3}{2}, CD = 1, A_1D_1 = 1.$$

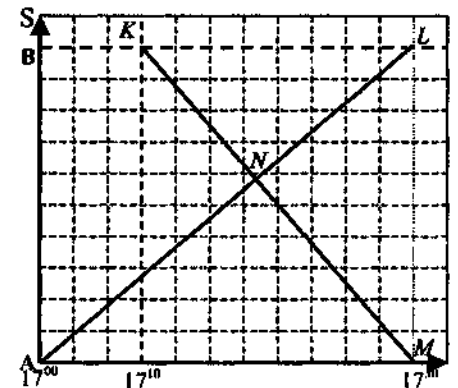
Следовательно,

$$C_1D_1 = \frac{CD}{AD} A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, легковая машина пришла в пункт B через $\frac{2}{3}$ часа после мотоциклиста. Заметим, что при решении этой задачи мы обошлись без введения каких-либо переменных!

Ответ: $\frac{2}{3}$ часа.

Пример 49. В 17 часов из пункта A в пункт B выехал рейсовый автобус, а в 17 часов 10 минут навстречу ему по тому же прямолинейному шоссе выехала легковая автомашина. В 17 часов 30 минут автобус прибыл в пункт A , а автомашина — в пункт B . Какую часть пути от A до B проехал автобус к моменту встречи?



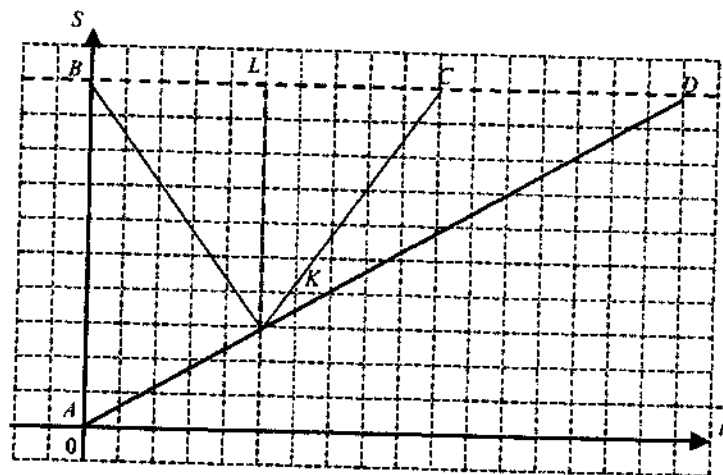
Решение. Воспользуемся геометрией. Треугольники KLN и AMN , очевидно, подобны. Поэтому отношение их любых сходственных элементов постоянно. $\frac{l_1}{l_2} = \frac{AM}{KL} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$.

Следовательно, $\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{3}{5} = 0,6$

Ответ: 0,6

Пример 50. Из пунктов A и B одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжил свой путь в пункт B , а велосипедист развернулся и также отправился туда же. Пешеход прибыл в пункт B на t часов позже возвращения велосипедиста. Сколько времени прошло до встречи, если скорость пешехода в k раз меньше скорости велосипедиста?

Решение. Используем графики. Закон движения велосипедиста в пункт A задается как $S = S_0 - V_{\text{вел.}} \cdot t$, где S_0 — расстояние между пунктами A и B .



Самое главное условие в этой задаче — это то, что на возвращение в пункт B велосипедисту потребуется то же время, которое он затратил, двигаясь навстречу пешеходу. Получим, что если $BL = LC = T$, то $LD = T + t$.

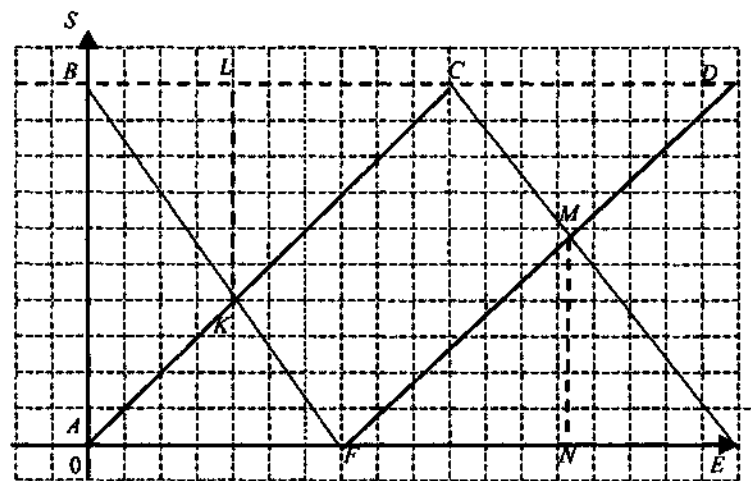
Используя геометрический смысл углового коэффициента прямой, получаем, что $\frac{LK}{LD} = V_{\text{пеш.}}$, $\frac{LK}{LC} = V_{\text{вел.}}$, откуда $\frac{LC}{LD} = \frac{V_{\text{пеш.}}}{V_{\text{вел.}}} = \frac{1}{k}$.

Подставляя, имеем: $\frac{T}{T+t} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow T(k-1) = t \Leftrightarrow T = \frac{t}{k-1}$.

Ответ: $\frac{t}{k-1}$.

Пример 51. Из пунктов A и B , расположенных на одной реке, одновременно с одной и той же собственной скоростью, равной 12 км/час, вышли два катера. После встречи они продолжили свой путь, каждый из катеров прибыл в пункт назначения, сразу же развернулся и отправился обратно. На обратном пути катера снова встретились, причем между моментами двух встреч прошло 17 часов. Через 32 часов после выезда катера вернулись в исходные пункты. Найдите скорость течения реки.

Решение. Снова воспользуемся графической иллюстрацией и снова решим эту задачу в общем виде.



Пусть, например, катер, вышедший из пункта B , шел сначала по течению, а обратно — против течения. Катер, вышедший из пункта A , напротив, сначала шел против течения, а обратно — по течению. Так как собственная скорость катеров одинакова и скорость течения реки также считается постоянной, то отрезки прямых, являющихся графиками движений катеров в одну и ту же сторону, параллельны.

Поэтому $KCMF$ — параллелограмм, и, следовательно, треугольник BKC равен треугольнику FME . Но тогда, как легко видеть, треугольник BLK равен треугольнику MNE . Поэтому сразу получим, что время, прошедшее от момента выхода катеров из исходных пунктов до момента их первой встречи, равно времени, прошедшему от момента второй встречи катеров до момента их возвращения.

Это и есть основная идея решения данной задачи, которая отнюдь сразу не бросается в глаза! Далее все просто. Обозначим T — общее время нахождения катеров в пути, T_0 — время, прошедшее между моментами встреч, t — время от выхода до момента первой встречи, или, что одинаково, от момента второй встречи до возвращения. Получим, что $t = \frac{T - T_0}{2}$.

Обозначим: V_+ — скорость катера по течению, а V_- — скорость катера против течения. И так как $V_+ = V_{\text{собств.}} + V_{\text{теч.}}$, а $V_- = V_{\text{собств.}} - V_{\text{теч.}}$, то $V_+ - V_- = 2V_{\text{теч.}}$, $V_+ + V_- = 2V_{\text{собств.}}$.

Двигаясь к точке своей первой встречи, катера совместно прошли все расстояние от A до B . Поэтому: $S = t(V_+ + V_-)$.

Наконец, время, затраченное каждым из них на весь путь, равно

$$T = \frac{S}{V_+} + \frac{S}{V_-} = t(V_+ + V_-) \left(\frac{V_+ + V_-}{V_+ \cdot V_-} \right) = \frac{(T - T_0)}{2} \left(\frac{4V_c^2}{V_c^2 - V_m^2} \right).$$

Найдем искомую величину:

$$\frac{V_c^2 - V_m^2}{V_c^2} = \left(\frac{2T - 2T_0}{T} \right) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{V_m}{V_c} \right)^2 = 2 - 2 \cdot \frac{T_0}{T} \Leftrightarrow \left(\frac{V_m}{V_c} \right)^2 = 2 \frac{T_0}{T} - 1.$$

$$\text{Отсюда: } \frac{V_m}{V_c} = \sqrt{2 \frac{T_0}{T} - 1} \Leftrightarrow V_m = V_c \sqrt{2 \frac{T_0}{T} - 1}.$$

Поставим исходные значения:

$$V_m = 12 \sqrt{\frac{2 \cdot 17}{32} - 1} = 12 \cdot \sqrt{\frac{17}{16} - 1} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3.$$

Ответ: скорость течения реки 3 км/час.

§ 2. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в ходе изучения свойств квадратичной функции

Стержнем программы любой направленности и профиля по математике является тема «Квадратное уравнение и квадратичная функция».

Линейные и квадратные уравнения и неравенства — единственные темы любой программы, начиная с гуманитарного профиля и заканчивая математическим, овладение которыми считается обязательным. Являясь фундаментом математического образования, эти темы, тем не менее, не получают достаточно широкого рассмотрения и осмысления. Особенно это относится к теме «Квадратное уравнение и квадратичная функция». Могут возразить: «Как же так? Ведь на эту тему отведено достаточно большое количество учебных часов». Действительно, количество часов, отводимых на эту тему, в общей сложности превышает количество часов, отводимых на какую-либо другую тему. Однако анализ программ по математике [98] показывает, что независимо от рассматриваемого УМК по математике, и в меньшей мере УМК для углубленного изучения, позволяет констатировать, что почти единственная цель изучения основной темы математики средней школы — выработать умение решать квадратные уравнения и решать задачи, сводящиеся к ним. Таким образом, при современном подходе к преподаванию данной темы превалирует алгоритмический подход, сводящийся к воспроизведению образцов решений, предлагаемых учителем. Это в корне противоречит целям развивающего обучения. Ведь в большинстве задач исследовательского уровня не ставится задача нахождения решения. В большинстве случаев это и невозможно. Гораздо чаще ставится вопрос о существовании этих решений или существовании решений с заданными свойствами.

Следует также отметить, что программой большинства курсов не предусмотрено обсуждение вопросов о равносильности существования корней квадратного уравнения и неотрицательности его дискриминанта, знаков корней квадратного трехчлена, расположения корней на числовой оси. Теорема Виета, применение которой в дальнейшем имеет широкое применение в большинстве предлагаемых программ либо изучается в ознакомительном порядке, либо вовсе отнесена к необязательному материалу.

2.1. Методика формирования содержательно-методической линии задач с параметрами в теме «Квадратный трехчлен. Квадратичная функция»

План предлагаемого изучения темы «Задачи с параметрами. Квадратный трехчлен. Квадратное уравнение» может быть представлен в виде следующей таблицы.

Т а б л и ц а



Левый столбец данной таблицы представляет основные вопросы, относящиеся к обязательным темам, которые обязаны быть рассмотрены в рамках нашей методики. В правом столбце данной таблицы представлены темы, решение задач с параметрами в которых в большей или меньшей мере непосредственно опираются на соответствующие вопросы. В рамках рассмотрения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ как абстракции должны быть как можно полнее и тщательнее рассмотрены частные проявления этой абстракции.

Естественно, что абсолютно точно представить, в какой теме средней или старшей школы будет использоваться тот или иной раздел, невозможно, поэтому таблица носит условный характер. Отдельные занятия могут использоваться по мере прохождения основной программы.

2.2. Предварительный этап: квадратное уравнение и квадратичная функция. Определение и график

На предварительном этапе введение понятия квадратного уравнения может быть представлено следующим образом.

1. Если произведение двух линейных двучленов относительно указанной переменной со старшими параметрическими коэффициентами равно нулю, то какое количество значений переменной может быть решением получившегося уравнения? Другими словами: известно, что $(ax + b)(cx + d) = 0, ac \neq 0$. Какое количество значений переменной является решением этого уравнения? Правильный ответ — не более двух, но и не менее одного значения переменной x .

Пример. Уравнению $(x - 2)(x - 3) = 0$ удовлетворяют два значения переменной, а уравнению $(2x - 2)(x - 1) = 0$ — только одно. Заметим, что этот вопрос — о количестве корней квадратного уравнения — до сих пор не получил точного определения в рамках школьного курса, поэтому речь идет не о количестве корней, а о количестве значений переменной.

2. Производя тождественные преобразования, произведение многочленов первой степени запишем в виде многочлена второй степени относительно выбранной переменной. В рамках системного исследования возникающего уравнения ставится вопрос о количестве его ре-

шений: всегда ли многочлен второй степени со старшим коэффициентом, отличным от нуля, можно представить в виде произведения двух линейных двучленов относительно данной переменной?

3. Вводится понятие квадратного трехчлена как новой абстракции, представимой в виде выражения $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ и связанных с ним понятий квадратного уравнения как уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ и квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, графиком которой является парабола.

4. Выполняется тождественное преобразование, необходимое для получения основных сведений и основных идей решения задач, связанных с квадратным трехчленом.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

5. Вводится новый производный параметр, связанный с определением квадратного трехчлена и зависящий от всего комплекса параметрических коэффициентов. Величина $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена, а также квадратного уравнения и обозначается символом D . В общем случае дискриминант квадратного трехчлена является функцией сразу трех независимых переменных a, b, c .

1. Если $D < 0$, то квадратное уравнение (квадратный трехчлен) корней не имеет.

2. Если $D > 0$, то квадратное уравнение (квадратный трехчлен) имеет два различных корня, и уравнение $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$,

$$\text{где } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение (квадратный трехчлен) имеет два совпадающих корня, и уравнение $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$,

$$\text{где } x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

В этом случае условию уравнения удовлетворяет единственное значение переменной.

6. Общее решение квадратного уравнения представляет совокупность значений переменной, выражающихся как функции параметрических коэффициентов и дискриминанта.

2.3. Решение квадратных уравнений с параметрами по определению

Замечание. Согласно сформулированным выше принципам, при решении задач с параметрами первая цель — проведение анализа задачи и только далее — нахождение решений.

Определение. Решить уравнение или неравенство с параметрами — это значит определить, при каких допустимых значениях параметров уравнение или неравенство

- 1) имеет решения
- 2) не имеет решения
- 3) установить количество решений
- 4) найти вид каждого решения при соответствующих ему значениях параметров

Пример 52. Решите уравнение $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$.

Решение. 1) Данное уравнение — квадратное относительно переменной x с параметром a . Допустимыми являются любые действительные значения параметра. Для того чтобы уравнение могло иметь решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант данного уравнения принимал неотрицательные значения. Вычислим дискриминант. $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

Так как дискриминант неотрицателен при всех значениях параметра, то уравнение имеет решение также при всех значениях параметра. То, что дискриминант оказался полным квадратом, можно считать случайностью.

2) Если $a = 1$, то дискриминант уравнения равен нулю, следовательно, уравнению удовлетворяет единственное значение переменной $x = 2$, однако уравнение имеет корень кратности два.

3) Если значение параметра $a \neq 1$, уравнение имеет два различных корня (т.е. уравнению удовлетворяют два различных значения переменной x).

$$x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: При $a=1$ уравнению удовлетворяет единственное значение переменной $x=2$,

если $a \neq 1$, то уравнение имеет два решения: $a+2$ и 2 .

Пример 53. Решите уравнение $x^2 - 4abx - (a^2 + b^2)^2 = 0$.

Решение. Допустимыми являются любые действительные значения параметров. Согласно схеме решения задач с параметрами имеем:

$$1) \frac{D(a; b)}{4} = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2 = -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 = -(a^2 - b^2)^2.$$

2) Если $a^2 \neq b^2$, то дискриминант уравнения отрицателен, и уравнение решений не имеет.

3) Если $a^2 = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$, то уравнение имеет решение, но при

этом дискриминант равен нулю, и поэтому единственное значение переменной x , удовлетворяющее уравнению, определяется по формуле: $x = 2ab$.

Ответ: 1) Если $a^2 \neq b^2$, то уравнение решений не имеет.

2) Если $a^2 = b^2$, уравнению удовлетворяет единственное значение переменной $x = 2ab$.

Пример 54. При каких значениях параметра a уравнению $x^2 + ax + 1 = 0$ удовлетворяет единственное значение переменной x ?

Решение. В данной задаче не требуется решить это уравнение. Мало того, решение уравнения вообще не надо находить. Уравнению будет удовлетворять единственное значение переменной в том случае, если дискриминант этого уравнения будет равен нулю. Следовательно, искомые значения параметра a будут задаваться уравнением: $a^2 - 4 = 0$.

$$\text{Имеем: } a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ответ: $-2; 2$.

Пример 55. Два подъемных крана, работая одновременно, разгрузили баржу за t часов. За какое время каждый из кранов может разгрузить баржу, если первый из них тратит на это на a часов меньше второго?

Решение. Исходя из физического смысла задачи, имеем, что допустимые значения параметров задаются неравенствами $a > 0, t > 0$. Если первый кран может выполнить работу за x часов, то второй — за $(x+a)$ часов. Составляя уравнение, получим: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{t}$. Так как

знаменатели дробей положительны, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow x(x+a) = t(2x+a) \Leftrightarrow x^2 - (2t-a)x - at = 0.$$

Исследуем полученное уравнение.

$$1) D = (2t-a)^2 + 4at = 4t^2 + a^2.$$

Дискриминант положителен и, таким образом, задача будет иметь решения при любых значениях параметров.

2) Найдем решения.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow x(x+a) = t(2x+a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2t-a)x - at = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2t-a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2} \\ x = \frac{2t-a-\sqrt{4t^2+a^2}}{2} \end{cases}$$

Из того, что $2t-a < \sqrt{4t^2+a^2}$, следует, что второе решение не удовлетворяет условию задачи, т.к. оно меньше нуля.

Замечание. Именно условию задачи, а не уравнению. Уравнению найденное значение как раз удовлетворяет.

Найдем время работы второго крана.

$$\frac{2t-a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2} + a = \frac{2t+a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2t-a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}; \frac{2t+a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}, \quad a > 0, t > 0.$$

Обучающий этап

Следующим шагом формирования содержательно-методической линии задач с параметрами является системное исследование графика квадратичной функции — параболы с одновременным рассмотрением вопроса о нахождении решений не только уравнения, но и соответствующего неравенства. В этом просматривается многоплановость трактовки графической модели: точка — как модель некоторого числа и, одновременно, точка — как граница некоторого множества. Данный подход реализован только в учебнике А.Г. Мордковича [79].

Расположение графика в зависимости от знаков первого коэффициента и знака дискриминанта, а также отвечающие этому решения квадратных уравнений и неравенств отобразим в виде таблицы.

Таблица 5

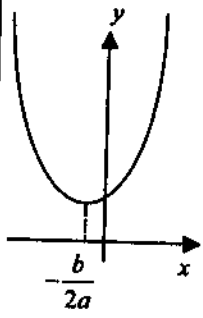
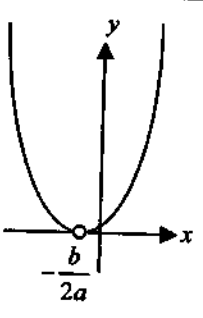
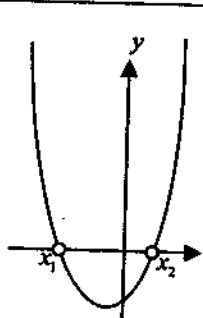
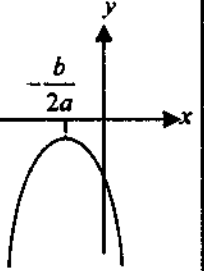
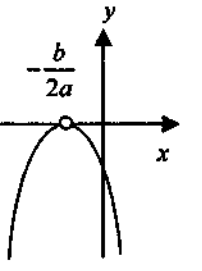
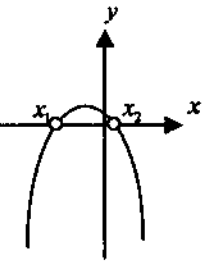
	$a > 0, D < 0$	$a > 0, D = 0$	$a > 0, D > 0$
			
$f(x) = 0$	$\emptyset$	$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ x = -\frac{b}{2a} \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$
$f(x) > 0$	R	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$f(x) \geq 0$	R	R	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$f(x) < 0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(x_1; x_2)$
$f(x) \leq 0$	$\emptyset$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$[x_1; x_2]$

Таблица 5 (продолжение)

	$a < 0, D < 0$	$a < 0, D = 0$	$a < 0, D > 0$
			
$f(x) = 0$	$\emptyset$	$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ x = -\frac{b}{2a} \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$
$f(x) > 0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(x_1; x_2)$
$f(x) \geq 0$	$\emptyset$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$[x_1; x_2]$
$f(x) < 0$	R	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$f(x) \leq 0$	R	R	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

Пример 56. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных корня.

Решение. Условие наличия различных корней уравнения равносильно условию положительности его дискриминанта. Поэтому, находя дискриминант: $\frac{D(k)}{4} = k^2 - (k^2 + 2k - 1) = 1 - 2k$, получим, что

искомые значения параметра будут являться решениями неравенства $1 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < 0,5$. Таким образом, при любом из найденных значений параметра частное уравнение будет иметь два различных корня.

Ответ: $(-\infty; 0,5)$

Пример 57. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнению $x^2 + m(m-1)x + 36 = 0$ удовлетворяет единственное значение переменной.

Решение. Необходимым и достаточным условием того, что квадратному уравнению удовлетворяет единственное значение переменной, является равенство его дискриминанта нулю. Именно для квадратного уравнения, ибо в общем случае уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ задает уравнение степени не выше второй. Вычислим дискриминант: $D = m^2(m+1)^2 - 4 \cdot 36 = (m^2 + m - 12)(m^2 + m + 12)$.

Искомые значения параметра являются решениями уравнения $(m^2 + m - 12)(m^2 + m + 12) = 0$.

$$(m^2 + m - 12)(m^2 + m + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 12 = 0 \\ m^2 + m + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 3 \end{cases}$$

Ответ: $-4; 3$

Пример 58. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнению $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ удовлетворяет единственное значение переменной.

Решение. В данном случае реализуется один из основных принципов решения задач с параметрами: если старший коэффициент при выделенной переменной — параметрический, то должен быть рассмотрен случай, когда он обращается в ноль.

Таким образом, искомыми значениями параметра могут быть либо $a = 2$, либо те его значения, отличные от 2, при которых дискриминант получающегося квадратного уравнения обращается в ноль.

1) $a = 2$. Возникающее частное уравнение будет линейным: $-4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0,25$. Оно имеет единственное решение, поэтому $a = 2$ является решением задачи.

2) Оставшиеся значения параметра будут решениями системы $\begin{cases} a \neq 2, \\ a^2 - (a-2)(2a-3) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a \neq 2, \\ a^2 - (a-2)(2a-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ -a^2 + 7a - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ a^2 - 7a + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 6 \end{cases}$$

Ответ: $1; 2; 6$.

Пример 59. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$ решений не имеет.

Решение. Старший коэффициент — параметрический, поэтому рассмотрим два случая.

1) $a = -1$. Уравнение приобретет вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 3 = 0$ и решений иметь не будет. Поэтому $a = -1$ решение задачи.

2) $a \neq -1$. В этом случае возникающее квадратное уравнение не имеет решений, если его дискриминант отрицателен.

Поэтому искомые значения параметра будут задаваться системой неравенств $\begin{cases} a \neq -1, \\ (a+1)^2 - (a+1)(a-2) < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a \neq -1, \\ (a+1)^2 - (a+1)(a-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1, \\ 3(a+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -1.$$

Объединяя найденные решения, получим, что искомым является любое значение параметра $a \in (-\infty; -1]$

Ответ: $(-\infty; -1]$.

2.4. Дискриминант квадратного трехчлена

Дискриминант квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac$ в решении учебных задач ассоциируется только с процессом вычисления корней. Если дискриминант есть величина неотрицательная, то существуют два корня квадратного трехчлена, вычисляемые по известным формулам, если же дискриминант отрицателен, то квадратное уравнение решений не имеет, и, следовательно, находить корни не надо.

Но неотрицательность дискриминанта является условием, равносильным существованию корней. Поэтому в ряде задач, в которых дано существование корней или в которых корни находятся, надо сделать вывод, что и дискриминант должен быть неотрицателен.

Пример 60. Решите уравнение $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 2(y+1)x + 2y^2 - 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Рассматривая его как уравнение относительно переменной x и параметром y , найдем дискриминант:

$$\frac{D}{4} = (y+1)^2 - 5(2y^2 - 2y + 1) = -9y^2 + 12y - 4 = -(3y-2)^2.$$

Так как необходимым и достаточным условием существования решения квадратного уравнения является неотрицательность его дискриминанта, получим, что это возможно лишь, если $y = \frac{2}{3}$. Подставляя в уравнение найденное значение, получим, что

$$5x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9} - 2x - \frac{4}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}(3x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, нам действительно удалось решить данное уравнение, хотя это уравнение с двумя переменными.

Замечание. При решении данной задачи был использован еще один основополагающий принцип решения задач с параметрами — параметром может быть объявлена любая переменная, входящая в уравнение.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Данный принцип хорошо иллюстрируется следующими двумя примерами, которые повторяют и расширяют материал.

Пример 61. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$, $a > 0$.

Решение. Непосредственное решение этого уравнения как уравнения относительно переменной x с параметром a невозможно, т.к. это уравнение четвертой степени.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно переменной a и параметром x . Получим, что $2a^2 - a(3x^2 + 2x) + x^4 + x^3 = 0$. Условием существования решения, т.е. выражения значения a как функции x , служит неотрицательность дискриминанта.

$$D(x) = (3x^2 + 2x)^2 - 8(x^4 + x^3) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = (x(x+2))^2.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} a = x^2 + x \\ a = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - a = 0 \\ x^2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2} \\ a \geq -\frac{1}{4} \\ x = -\sqrt{2a} \\ x = \sqrt{2a} \\ a \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}; -\frac{1}{4} \leq a < 0$, и

$\frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}; -\sqrt{2a}; \sqrt{2a}$ при любом значении $a \geq 0$.

В качестве параметра может выступать на каком-то этапе решения единственная переменная, входящая в уравнение.

Пример 62. Решите уравнение $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$.

Решение. Представим это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{2}$!

Данное решение подтверждает принцип свобода выбора известной и параметра.

$$(\sqrt{2})^2 - (2x^2 + 1)\sqrt{2} + (x^4 - x) = 0.$$

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x = (2x+1)^2$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{2} = x^2 + x + 1 \\ \sqrt{2} = x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - (\sqrt{2} - 1) = 0 \\ x^2 - x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1-\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}; \frac{1-\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}; \frac{1+\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}.$$

Пример 63. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2. Получим, что

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 12xy - 4x + 6y + 1 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение, рассматривая его как квадратное уравнение относительно переменной x .

$$4x^2 - 4x(3y+1) + (9y^2 + 6y + 1) = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 4(3y+1)^2 - 4(9y^2 + 6y + 1) = 0$$

Таким образом, второе уравнение системы имеет единственное решение $x = \frac{1}{2}(3y+1)$. Подставляя найденное значение во второе уравнение, получим:

$$\frac{3}{4}(3y+1)^2 - 2y^2 + \frac{5}{2}y(3y+1) - \frac{17}{2}(3y+1) - 6y + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49y^2 - 98y + 49 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

После чего найдем, что $x = 2$.

Ответ: (2;1)

Пример 64. Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Решение. Так как в условии сказано, что при некотором искомом значении x существуют решения этого уравнения, то уравнение

$z^2 - z(x+y) + (x^2 + xy + 2y^2 - 1) = 0$ имеет решение. Следовательно, существует пара значений переменных x и y , при которых дискриминант уравнения $D(y, x) = (x+y)^2 - 4(x^2 + 2y^2 + xy - 1)$ неотрицателен. Таким образом, при искомом значении x неравенство $-7y^2 - 2xy - 3x^2 + 4 \geq 0$ должно иметь хотя бы одно решение. Но первый коэффициент данного квадратного трехчлена относительно переменной y отрицателен. А это, в свою очередь, означает то, что для того, чтобы неравенство могло бы иметь решение, дискриминант квадратного трехчлена $D(x) = -80x^2 + 112$ также должен быть неотрицателен (Таблица 5). Получим, что, решая неравенство $5x^2 \leq 7$, мы находим все значения переменной x , удовлетворяющие условию задачи. Выбирая из них наименьшее, найдем: $x = -\sqrt{\frac{7}{5}}$.

$$\text{Ответ: } -\sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Пример 65. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $x^2 + 3xy + 3ay^2 + \left(\frac{9}{2} - a\right)y + 4x + 5 = 0$

1) имеет хотя бы одно решение при $y = 2$;

2) имеет хотя бы одно решение (x, y) ?

Решение. Ответ на первый вопрос задачи стандартен. Действительно, если пара чисел $(x_0; 2)$ — решение, то: $x_0^2 + 6x_0 + 12a + 9 - 2a + 4x_0 + 5 = 0$. Или $x_0^2 + 10x_0 + 10a + 14 = 0$. Чтобы существовало какое-либо решение этого уравнения, его дискриминант должен быть неотрицателен.

$$D(a) = 44 - 40a \geq 0, \text{ т.е. } a \leq \frac{11}{10}.$$

Решение второй части является продолжением решения предыдущей задачи. Действительно, запишем уравнение в виде:

$$x^2 + (3y+4)x + \left(3ay^2 + \left(\frac{9}{2}\right)y + 5\right) = 0.$$

Если уравнение имеет решение, то его дискриминант неотрицателен. $D(y, a) = 3(3 - 4a)y^2 + (6 + 4a)y - 4 \geq 0$. В отличие от первой задачи старший коэффициент получившегося многочлена параметрический, поэтому должны быть рассмотрены три случая.

1) $a = \frac{3}{4}$. $D\left(y, \frac{3}{4}\right) = 9y - 4$ и, конечно же, найдется число y_0 такое, что дискриминант будет неотрицателен. Например, $y = 2$.

2) $a < \frac{3}{4}$. В этом случае первый коэффициент квадратного трехчлена положителен, а свободный член — отрицателен. Поэтому всегда найдутся числа, являющиеся решением данного неравенства.

3) $a > \frac{3}{4}$. В этом случае первый коэффициент отрицателен. Учитывая, что решение должно существовать, получим, что величина $D(a) = 16a^2 - 144a + 180 \geq 0$.

$$\text{Получим систему: } \begin{cases} a > \frac{3}{4} \\ 4a^2 - 36a + 45 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} < a \leq \frac{3}{2} \\ a \geq \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\text{Объединяя найденные значения параметра, получим: } \begin{cases} a \leq \frac{3}{2} \\ a \geq \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right)$$

2.5. Сохранение знака значений квадратного трехчлена

Неотрицательность дискриминанта квадратного трехчлена есть необходимое и достаточное условие наличия корней этого трехчлена. В свою очередь его отрицательность — необходимое и достаточное условие сохранения знака значений при всех значениях переменной.

Представим критерии того, что квадратный трехчлен принимает значения одного знака на всей числовой прямой.

Таблица 6

Условие	Критерий
1. $(f(x) > 0 \forall x)$	1. $\begin{cases} D_f < 0, \\ a > 0 \end{cases}$
2. $(f(x) \geq 0 \forall x)$	2. $\begin{cases} D_f \leq 0, \\ a > 0 \end{cases}$
3. $(f(x) < 0 \forall x)$	3. $\begin{cases} D_f < 0, \\ a < 0 \end{cases}$
4. $(f(x) \leq 0 \forall x)$	4. $\begin{cases} D_f \leq 0, \\ a < 0 \end{cases}$

Пример 66. Найти все значения параметра a , при которых квадратный трехчлен $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$ положителен для любого x .

Решение. Согласно приведенной выше таблице, условия, задающие искомые значения параметра, следующие:

$$(f(x) > 0 \forall x) \Leftrightarrow \begin{cases} D_f < 0, \\ a > 0 \end{cases}$$

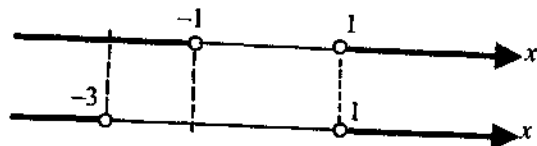
Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ (a - 1)^2 - 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases}$$

Первое неравенство системы — условие положительности старшего коэффициента квадратного трехчлена, второе — условие отрицательности его дискриминанта. Следует отметить, что только условие отрицательности дискриминанта квадратного трехчлена при решении неравенства отнюдь не означает отсутствие решений этого неравенства.

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ (a - 1)^2 - 2(a^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a + 1) > 0, \\ -a^2 - 2a + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a + 1) > 0, \\ (a - 1)(a + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \\ a > 1 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Пример 67. При каких значениях параметра квадратный трехчлен $y = (a^2 + 6a - 4)x^2 - 2(a - 1)x - 1$ принимает отрицательные значения при всех значениях переменной x ?

Решение. Искомые значения параметра задаются системой неравенств

$$\begin{cases} a^2 + 6a - 4 < 0, \\ (a - 1)^2 + (a^2 + 6a - 4) < 0 \end{cases}$$

Оформим решение в виде таблицы, в левом столбце которой будут представлены аналитические выкладки, а в правом — необходимые для этого расчеты и иллюстрации.

$\begin{cases} a^2 + 6a - 4 < 0, \\ (a - 1)^2 + (a^2 + 6a - 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 6a - 4 < 0, \\ 2a^2 + 4a - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} < x < \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$	$a^2 + 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 - \sqrt{13} \\ a = -3 + \sqrt{13} \end{cases}$ $\frac{D}{4} = 13$ $2a^2 + 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \\ a = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\frac{D}{4} = 10$
Ответ: $\left(\frac{-2 - \sqrt{10}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \right)$	

Пример 68. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 + (a - 1)x + a - 3 < 0$ верно при всех значениях переменной x .

Решение. Отличительной чертой подобного класса задач является то, что явно не указано, какова степень соответствующего многочлена относительно переменной x . Следовательно, должен быть рассмотрен случай, когда параметрический коэффициент при старшей степени переменной равен нулю.

Повторим принцип решения параметрических задач: если коэффициент при старшей степени переменной есть функция параметра или параметров, должен быть рассмотрен случай, когда этот параметрический коэффициент равен нулю. Имеем:

$$1) \begin{cases} a = 0, \\ -x - 3 < 0 \end{cases}.$$

Получившееся неравенство имеет решения, однако не является верным при всех значениях x . Таким образом, $a = 0$ решением задачи не является.

2) $a \neq 0$. В этом случае рассматриваемое неравенство — квадратное, а следовательно, искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{cases} a < 0, \\ (a - 1)^2 - 4a(a - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ -3a^2 + 10a + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a < \frac{-5 - 2\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow a < \frac{-5 - 2\sqrt{7}}{3} \\ a > \frac{-5 + 2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{-5 - 2\sqrt{7}}{3} \right).$$

Пример 69. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство $\frac{2 - ax - x^2}{x^2 - x + 1} \leq 3$ будет верным при всех значениях переменной x .

Решение. Квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе дроби при любом значении переменной x , принимает только положительные значения (см. таблицу 5). Поэтому умножение обеих частей неравенства на положительно определенное выражение будет равносильным преобразованием, и кроме того, знак неравенства меняться не будет.

$$\frac{2-ax-x^2}{x^2-x+1} \leq 3 \Leftrightarrow 2-ax-x^2 \leq 3x^2-3x+3 \Leftrightarrow 4x^2+(a-3)x+1 \geq 0.$$

Так как старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, то квадратный трехчлен будет принимать только неотрицательные значения тогда и только тогда, когда его дискриминант будет не больше нуля (таблица 5).

$$\text{Имеем: } D(a) = (a-3)^2 - 16 = (a-7)(a+1).$$

$$\text{Решим неравенство: } (a-7)(a+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 7$$

$$\text{Ответ: } [-1; 7]$$

Пример 70. При каких значениях параметра неравенство $\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1} < 3$ справедливо при всех значениях x ?

Решение.

$$\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1} < 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-kx+1-3x^2-3x-3}{x^2+x+1} < 0 \Leftrightarrow -2x^2-(k+3)x-2 < 0.$$

Переход от дробно-рационального неравенства к квадратичному неравенству равносильное преобразование, т.к. знаменатель дроби есть выражение, принимающее положительные значения при всех значениях x , в силу выполнения критерия положительности значений, принимаемых квадратным трехчленом, стоящим в знаменателе $-2x^2-(k+3)x-2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2+(k+3)x+2 > 0$.

Так как старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, то искомые значения параметра в этом случае задаются неравенством $(k+3)^2 - 16 < 0$. Решим его:

$$(k+3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (k-1)(k+7) < 0 \Leftrightarrow -7 < k < 1.$$

$$\text{Ответ: } (-7; 1)$$

Пример 71. При каких значениях параметра a неравенство $1 < \frac{ax^2+x+2}{x^2+1} < 3$ верно при всех значениях переменной x ?

Решение. Т.к. квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе дроби, положителен, то, данное двойное неравенство будет равносильно системе неравенств:

$$-1 < \frac{ax^2+x+2}{x^2+1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+x+2 > -x^2-1, \\ ax^2+x+2 < 3x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)x^2+x+3 > 0, \\ (a-3)x^2+x-1 < 0 \end{cases}$$

Система неравенств будет верна при всех значениях переменной x тогда и только тогда, когда каждое из неравенств будет верно при всех значениях переменной. Заметим, что $a = -1$ или $a = 3$ не удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{cases} a+1 > 0, \\ 1-12(a+1) < 0, \\ a-3 < 0, \\ 1+4(a-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 > \frac{1}{12}, \\ a-3 < -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{12} < a < \frac{11}{4}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{11}{12}; \frac{11}{4}\right).$$

2.6. Корни квадратного трехчлена

Понятие корня или решения уравнения или неравенства является одним из основных понятий курса математики. С учебной точки зрения, трудности в решении задач с параметрами связаны не столько с их технической сложностью, сколько с ясным пониманием многоуровневости таких задач. Например, в обычном уравнении «с иском» следует просто найти его корни и на этом уровне решение заканчивается. А в уравнении с параметром следует перейти на более высокий уровень: надо еще на корни уравнения «посмотреть», т.е. понять, как они изменяются при изменении данных задачи и, далее, определить, какими должны быть эти числовые данные, чтобы корни уравнения в итоге удовлетворяли тому или иному условию. Поэтому формирующаяся в школе привычка решить уравнение и на этом поставить точку, и вообще, присутствие в подавляющем числе уравнений и нера-

венств только одной переменной сразу же переводит задачи с параметром в ранг трудных.

Иногда само условие задачи — установление существования корня, а не его нахождение.

Определение. Корнем уравнения или неравенства называется значение переменной, при подстановке которой в уравнение или неравенство уравнение или неравенство обращается в верное числовое равенство.

Геометрически существование корня уравнения означает, что график уравнения имеет общие точки с осью OX .

При использовании определения корня в решении задач с параметрами можно сформулировать еще один принцип: если известно хотя бы одно решение задачи с параметрами, необходимо найти значения параметров, отвечающих этому решению, а из найденных значений выбрать значения, отвечающие полному условию задачи.

Пример 72. Найдите все значения параметров p и q , при которых числа 3 и -5 являются корнями уравнения $-x^2 + px + q = 0$.

Решение. Используя определение решения, получим, что искомые значения параметров удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} -9 + 3p + q = 0, \\ -25 - 5p + q = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему.

$$\begin{cases} -9 + 3p + q = 0, \\ -25 - 5p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p + q = 9, \\ -5p + q = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p + q = 9, \\ 8p = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -2, \\ q = 15 \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 15)$

Пример 73. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнение $(a^2 + 2b)x^2 + (b^2 + 2a + 1)x + 1 = 0$ имеет корни, причем хотя бы один из них равен 1.

Решение. Подставим значение $x = 1$ в уравнение. По условию, оно обратится в верное равенство. Получим, что

$$a^2 + 2b + b^2 + 2a + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1 \end{cases}$$

Так как набор значений параметров единственный, и он найден в результате подстановки заданного значения переменной, то проверять, выполняется ли при этих значениях параметров условие задачи не надо.

Ответ: $(-1; -1)$

Пример 74. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Известно, что $a + b + c < 0$. Определите знаки параметров a и c .

Решение. Обратимся к таблице 5. Квадратное уравнение не имеет решений в тех случаях, когда график квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ не пересекает оси OX . При этом парабола расположена либо выше оси OX , либо ниже ее. В первом случае квадратный трехчлен принимает положительные значения, а во втором — отрицательные.

Осталось заметить, что $c = f(0)$, $a + b + c = f(1)$.

И так как по условию $f(1) = a + b + c < 0$, то, следовательно, квадратный трехчлен принимает только отрицательные значения. Поэтому $a < 0$, $c = f(0) < 0$.

Ответ: $a < 0$, $c < 0$.

Пример 75. О квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ известно, что $a > 0$, $a + c < b$. Имеет ли данное уравнение решение?

Решение. Так как старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ положителен, то ветви параболы направлены вверх (таблица 5). Условие $a + c < b \Leftrightarrow a - b + c < 0$ можно записать в виде $f(-1) < 0$. Это означает, что на графике есть точка с отрицательной ординатой. Используя понятие непрерывности, получим, что парабола будет пересекать ось OX в двух различных точках. Таким образом, уравнение имеет два, причем различных корня.

Ответ: данное уравнение имеет решение.

Пример 76. Даны три уравнения

$$1) x^2 - (a + b)x + 8 = 0;$$

$$2) x^2 - b(b + 1)x + c = 0;$$

$$3) x^4 - b(b + 1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет, по крайней мере, один корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый корень первого уравнения является корнем третьего и, по крайней мере, один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a, b, c , если $b > 3$.

Решение. Решение основано на том ясном факте, что квадратное уравнение не может иметь более двух решений. Действительно: пусть x_1 и x_2 — корни первого уравнения, и пусть, например, x_1 — корень второго уравнения. Для третьего уравнения получим:

$$\begin{cases} x_1^4 - b(b+1)x_1^2 + c = 0, \\ x_2^4 - b(b+1)x_2^2 + c = 0 \end{cases} \text{ Но эту же систему можно записать как}$$

$$\begin{cases} (x_1^2)^2 + b(b+1)(x_1^2) + c = 0, \\ (x_2^2)^2 + b(b+1)(x_2^2) + c = 0 \end{cases}, \text{ откуда следует, что числа } x_1^2 \text{ и } x_2^2$$

также являются корнями второго уравнения. Таким образом, получаем, что второму уравнению удовлетворяют три (!) значения переменной. Так как невозможно, чтобы квадратное уравнение имело три различных корня, то среди данных трех чисел как минимум два — одинаковые. То есть либо $x_1 = x_1^2$, либо $x_1 = x_2^2$. Первое равенство противоречит тому условию, что корни первого уравнения больше единицы. Поэтому возможно лишь второе равенство.

$$\text{Но тогда } \begin{cases} x_1^2 x_2 = 8, \\ a + b = x_2 + x_2^2, \\ c = (x_2^2)^2, \\ b(b+1) = x_2^2 + x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ a + b = 6, \\ c = 64, \\ \begin{cases} b = 4 \\ b = -5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Отбирая подходящие значения параметров, получим: } \begin{cases} a = 2, \\ b = 4, \\ c = 64 \end{cases}$$

Ответ: (2; 4; 64).

При решении мы использовали соотношение между корнями квадратного трехчлена, задаваемые теоремой Виета.

2.7. Соотношение между корнями квадратного трехчлена.

Теорема Виета

При решении квадратных уравнений и квадратичных неравенств с параметрами и без них во многих случаях применяются формулы Виета.

Теорема Виета. Если квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ имеет корни x_1 и x_2 , т.е. его дискриминант неотрицателен, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Отметим «скрытое коварство» этих соотношений: сами по себе они еще не обеспечивают существование корней квадратного трехчлена. Поэтому эти соотношения нельзя использовать, не проверив условие неотрицательности дискриминанта.

Обратная теорема. Любые два числа p и q являются корнями квадратного трехчлена $f(x) = a(x^2 - (p+q)x + pq)$, $a \neq 0$ и квадратного уравнения $x^2 - (p+q)x + pq = 0$.

С л е д с т в и е. Формула разложения квадратного трехчлена на множители.

Если x_1 и x_2 — корни трехчлена, то $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

В формулировках и в ходе решения большого количества задач используются выражения, содержащие корни квадратного трехчлена. Обычно эти условия удается преобразовать таким образом, чтобы в их записи участвовали только произведение корней или их сумма.

Определение. Многочлен $P(x, y)$ называется симметрическим, если $P(x, y) \equiv P(y, x)$, т.е. не меняется при замене x на y , а y на x .

В частности, многочлены $\sigma_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\sigma_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ — простейшие симметрические многочлены от двух переменных. Кроме них, в задачах на применение формул Виета для квадратного уравнения часто встречаются так называемые степенные суммы, т.е. многочлены вида $s_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$s_1 = x_1 + x_2 = \sigma_1, \quad s_2 = x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$s_3 = x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \text{ и т.д.}$$

Пример 77. Найдите значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $5x^2 - ax + 12 = 0$ на 1,4 больше другого.

Решение. По формулам Виета получим, что
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a}{5} \\ x_1 x_2 = \frac{12}{5} \\ x_1 = x_2 - \frac{7}{5} \end{cases}$$

Основная и особенно часто встречающаяся ошибка при решении задач с параметрами состоит в том, что учащиеся пытаются найти не то, что требуется в условии. В данной задаче нахождение корней уравнения не нужно.

$$\left(\frac{a}{5}\right)^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4x_1 x_2.$$

$$\text{Получим } \frac{a^2}{25} = \frac{49}{25} + 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{49 + 240}{25} = \frac{289}{25}.$$

$$\text{Решим полученное уравнение } a^2 = 289 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 17 \\ a = -17 \end{cases}.$$

Ответ: $-17; 17$.

Пример 78. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма корней квадратного уравнения $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней.

$$\text{Решение. } x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0.$$

$$\text{По формулам Виета получим, что } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1 x_2 = 2a - 1 \\ x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Применяя выражение для степенных сумм, получим, что $2a = 4a^2 - 2(2a - 1)$.

$$2a = 4a^2 - 2(2a - 1) \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $1; \frac{1}{2}$.

Пример 79. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ был бы квадратом другого.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения. По теореме Виета получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4}, \\ x_1 x_2 = a^3, \\ x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

$$\text{Выразим значения корней через значение параметра } \begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = a^2, \\ a^3 + a - \frac{15}{4} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Из уравнения } a^3 + a - \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ получим, что наибольшее}$$

значение параметра, отвечающее условию задачи, равно $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 80. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы больше на 1 соответствующих корней уравнения $2x^2 - 8x + 3 = 0$.

Решение. Убедившись, что заданное уравнение имеет решения, но не находя их (!), обозначим x_1, x_2 — корни искомого уравнения, тогда $x_1 - 1, x_2 - 1$ — корни данного. Очевидно, что корни искомого уравнения существуют, т.к. существуют корни данного.

По формулам Виета получим:

$$\begin{cases} x_1 - 1 + x_2 - 1 = 4, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 x_2 = \frac{13}{2} \end{cases}.$$

По обратной теореме получим, что искомое уравнение будет иметь вид

$$x^2 - 6x + \frac{13}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 13 = 0.$$

Ответ: $2x^2 - 12x + 13 = 0$.

Пример 81. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых разность корней уравнения $2x^2 - (a+1)x + a - 1 = 0$ равна их произведению.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Запишем формулы Виета.

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 8(a-1) \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2} \\ x_1 x_2 = x_1 - x_2 = \frac{a-1}{2} \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений находим, что $x_1 = \frac{a}{2}$.

Используем принцип: если известно решение задачи, то надо найти значения параметра, отвечающие этому решению. Следовательно, искомые значения параметров задаются системой:

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 9 \geq 0, \\ \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(a+1) + a - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2. \end{cases}$$

Ответ: 2.

2.8. Расположение корней квадратного трехчлена относительно начала координат

Сформулируем три вопроса, которые часто возникают при решении задач.

1. В каком случае корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ положительны?

2. В каком случае корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ отрицательны?

3. В каком случае корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеют разные знаки?

Ответ на эти вопросы дает теорема Виета.

Действительно, если x_1 и x_2 — корни и его дискриминант неотрицателен, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

1. Если оба корня положительны, то, конечно, положительны их сумма и произведение, которые выражаются через коэффициенты трехчлена.

$$\text{Получим } (x_1 > 0, x_2 > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ ab < 0, \\ ac > 0 \end{cases}$$

2. Если оба корня отрицательны, то произведение корней положительно, а сумма отрицательна. Поэтому

$$(x_1 < 0, x_2 < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0 \end{cases}$$

3. Если корни разных знаков, то сумма может быть произвольным по знаку числом, а произведение — отрицательно. Поэтому $(x_1 < 0, x_2 > 0) \Leftrightarrow ac < 0$.

Сведем полученные критерии в таблице.

Таблица 7

$(x_1 > 0, x_2 > 0)$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ ab < 0, \\ ac > 0 \end{cases}$
$(x_1 < 0, x_2 < 0)$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0 \end{cases}$
$(x_1 < 0, x_2 > 0)$	$ac < 0$

Пример 82. При каких значениях параметра оба корня квадратного трехчлена $(2+k)x^2 - 2kx + 3k$ положительны?

Решение. Искомые значения параметра задаются системой неравенств

$$\begin{cases} k^2 - 3k(2+k) \geq 0, \\ -2k(k+2) < 0, \\ 3k(k+2) > 0. \end{cases}$$

Заметив, что второе и третье неравенства равносильны, получим:

$$\begin{cases} k(-2k-6) \geq 0, \\ k(k+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(k+3) \leq 0, \\ k(k+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq k \leq 0 \\ k < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq k < -2.$$

Ответ: $[-3; -2)$.

Пример 83. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2(m-1)x - 2m - 3 = 0$ имеет корни разных знаков.

Решение. Искомые значения параметра задаются неравенством:

$$-2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m > -1,5.$$

Ответ: $(-1,5; +\infty)$.

Пример 84. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $x^2 + (3-2a)x - 3a + 2$ имеет различные корни, среди которых нет ни одного положительного.

Решение. Формулировка задачи может быть записана следующим образом: если x_1, x_2 — корни данного уравнения, то $x_1 < x_2 \leq 0$. Поэтому искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{cases} (3-2a)^2 + 4(3a-2) > 0, \\ 3-2a < 0, \\ 2-3a \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Получим: } \begin{cases} (3-2a)^2 + 4(3a-2) > 0, \\ 3-2a > 0, \\ 2-3a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 1 > 0, \\ a < \frac{3}{2}, \\ a \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a < \frac{3}{2}.$$

Ответ: $[\frac{2}{3}; \frac{3}{2})$.

2.9. Расположение корней квадратного трехчлена относительно точки p числовой оси

Сформулируем следующие вопросы:

1. В каком случае оба корня квадратного трехчлена больше данного числа p ?
2. В каком случае оба корня квадратного трехчлена меньше данного числа p ?
3. В каком случае один корень квадратного трехчлена меньше, а второй больше данного числа p ?

Ответы на эти вопросы мы получим, построив вспомогательный трехчлен $g(x)$, каждый корень которого будет на p единиц меньше соответствующего корня многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Пусть x_1 и x_2 — корни $f(x) = ax^2 + bx + c$, тогда многочлен $g(x)$ будет иметь следующий вид

$$g(x) = a(x - (x_1 - p))(x - (x_2 - p)).$$

Раскрывая скобки, получим явный вид этого трехчлена

$$g(x) = ax^2 - ax(x_1 + x_2 - 2p) + a(p - x_1)(p - x_2).$$

Т.к. x_1 и x_2 — корни многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$\text{то } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Получим:

$$g(x) = ax^2 + (2ap + b)x + (ap^2 + bp + c) = ax^2 + f'(p)x + f(p).$$

Отметим, что построенный нами трехчлен $g(x)$ и исходный многочлен одновременно имеют или не имеют корни.

1. В случае, если оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ больше данного числа p , оба корня многочлена $g(x)$ положительны.
2. В случае, если оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ меньше данного числа p , оба корня многочлена $g(x)$ отрицательны.
3. В случае, если один корень квадратного трехчлена меньше, а второй больше данного числа p , корни $g(x)$ имеют разные знаки.

Представим полученные критерии в таблице.

Таблица 8

$(x_1 > p, x_2 > p)$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ af''(p) < 0, \\ af'(p) > 0 \end{cases}$
$(x_1 < p, x_2 < p)$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ af''(p) > 0, \\ af'(p) > 0 \end{cases}$
$(x_1 < p, x_2 > p)$	$af'(p) < 0$

Пример 85. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1.

Решение. Левая часть уравнения — многочлен степени не выше 2. Его старший коэффициент — параметрический, поэтому надо рассмотреть случай, когда он равен нулю.

$$1. \begin{cases} a = -1, \\ 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}. \text{Таким образом, } a = -1 \text{ является реше-}$$

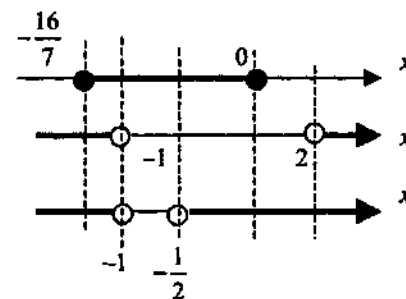
нием задачи.

2. Пусть теперь $a \neq -1$. Тогда, согласно критериям, искомые значения параметра задаются системой неравенств

$$\begin{cases} 9a^2 - 16a(a+1) \geq 0, \\ (a+1)(2(a+1) - 3a) < 0, \\ (a+1)((a+1) - 3a + 4a) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 16a(a+1) \geq 0, \\ (a+1)(2(a+1) - 3a) < 0, \\ (a+1)((a+1) - 3a + 4a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(7a+16) \geq 0, \\ (a+1)(2-a) < 0, \\ (a+1)(2a+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a(7a+16) \geq 0, \\ (a+1)(2-a) < 0, \\ (a+1)(2a+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{7} \leq x < -1.$$



Ответ: $\left[-\frac{16}{7}; -1\right]$

Пример 86. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a+1) = 0$ имеет два корня, причем один из них меньше a , а другой больше a .

Решение. Согласно критерию искомые значения параметра задаются неравенством $2a^2 - 2(2a+1)a + a(a+1) < 0$.

Получим:

$$2a^2 - 2(2a+1)a + a(a+1) < 0 \Leftrightarrow -a^2 - a < 0 \Leftrightarrow a(a+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > -1 \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (-1; +\infty)$

Пример 87. Найти все значения параметра a , при котором корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

Решение. Искомые значения параметра задаются системой неравенств

$$\begin{cases} 1 - 4a \geq 0, \\ 2a + 1 < 0, \\ a^2 + 2a > 0 \end{cases}. \text{Получим: } \begin{cases} 1 - 4a \geq 0, \\ 2a + 1 < 0, \\ a^2 + 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{4}, \\ a < -\frac{1}{2}, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -2.$$

Ответ: $(-\infty; -2)$.

2.10. Расположение корней квадратного трехчлена относительно интервала $(p; q)$

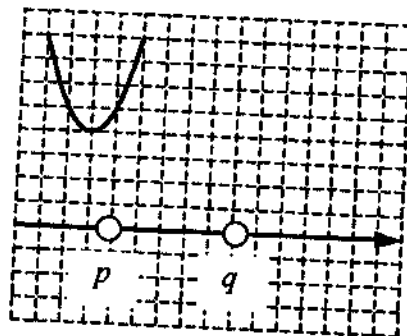
Существует семь различных способов расположения корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ относительно интервала $(p; q)$.

Четыре из них отвечают случаям, когда на интервале корней нет, два — когда на интервале лежит единственный корень многочлена, и один — когда на интервале находятся оба корня квадратного трехчлена.

Рассмотрим первые четыре случая.

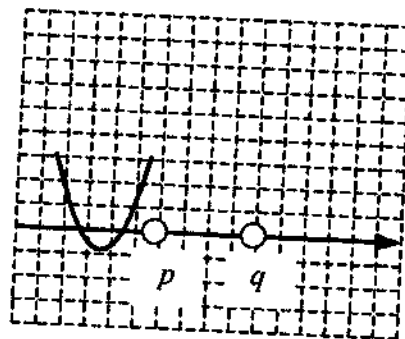
1) На интервале $(p; q)$ корней нет, т.к. квадратный трехчлен их вовсе не имеет.

Критерий: $D_f < 0$.



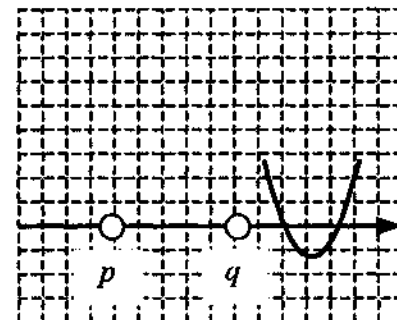
2) На интервале нет корней, т.к. оба корня меньше числа p .

Критерий: $\begin{cases} D_f \geq 0, \\ a \cdot f'(p) > 0, \\ a \cdot f(p) > 0 \end{cases}$



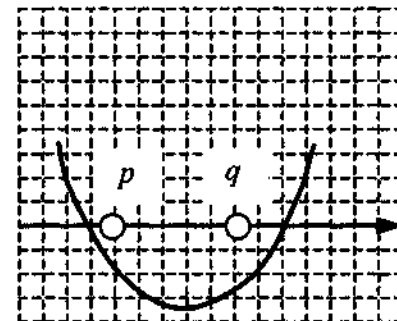
3) На интервале $(p; q)$ нет корней, т.к. оба корня больше числа q .

Критерий: $\begin{cases} D_f \geq 0, \\ a \cdot f'(q) < 0, \\ a \cdot f(q) > 0 \end{cases}$



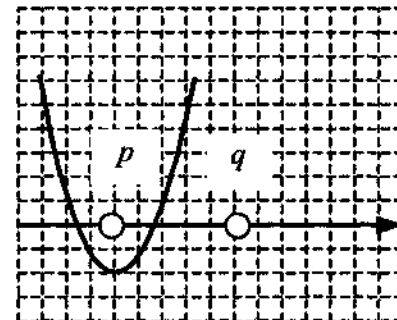
4) На интервале корней нет, т.к. один из них меньше числа p , а второй — больше числа q .

Критерий: $\begin{cases} a \cdot f(p) < 0, \\ a \cdot f(q) < 0 \end{cases}$



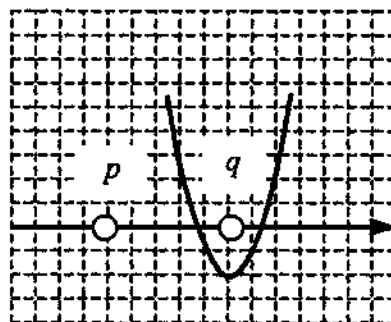
5) На интервале больший корень трехчлена.

Критерий: $\begin{cases} a \cdot f(p) < 0, \\ a \cdot f(q) > 0 \end{cases}$



б) На интервале меньший корень трехчлена.

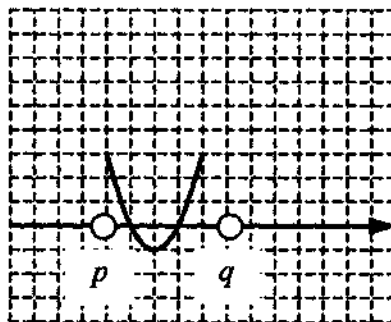
$$\text{Критерий: } \begin{cases} a \cdot f(p) > 0, \\ a \cdot f(q) < 0 \end{cases}$$



Замечание: два последних критерия описывают случаи, когда на интервале находится один корень многочлена. И поэтому, если в задаче не имеет смысла выяснять, какой из них принадлежит ему, то эти критерии могут быть объединены: $f(p) \cdot f(q) < 0$. Последняя формула выражает известную теорему математического анализа: если непрерывная функция принимает на концах отрезка $[p; q]$ значения противоположных знаков, то внутри интервала $(p; q)$ расположен хотя бы один корень функции.

7) На интервале расположены оба корня.

$$\text{Критерий: } \begin{cases} D_f \geq 0, \\ a \cdot f'(p) < 0, \\ a \cdot f'(q) > 0, \\ a \cdot f(q) > 0 \end{cases}$$



Замечание. Если вместо интервала $(p; q)$ рассматриваются интервалы $[p; q)$, $(p; q]$ или отрезок $[p; q]$, то задача сначала решается для граничных точек этих множеств, а затем применяются критерии.

Пример 88. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m = 0$ имеет один корень, меньший 2, а второй — больший 3.

Решение. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m$. Искомые значения параметра будут задаваться, согласно критерию 4, системой неравенств:

$$\begin{cases} (m-2)f(2) < 0, \\ (m-2)f(3) < 0 \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (m-2)(4(m-2) - 4(m+3) + 4m) < 0, \\ (m-2)(9(m-2) - 6(m+3) + 4m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(4m-20) < 0, \\ (m-2)(7m-36) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-5) < 0 \\ (m-2)\left(m - \frac{36}{7}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 5, \\ 2 < m < \frac{36}{7} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 5 \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 5)$

Пример 89. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $4x^2 - 2x + m = 0$ имеет два корня, принадлежащие интервалу $(-1; 1)$.

Решение. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = 4x^2 - 2x + m$, найдем его производную $f'(x) = 8x - 2$. Искомые значения параметра, согласно критерию 7, будут задаваться системой неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 4m \geq 0, \\ 4(-10) < 0, \\ 4(4 + 2 + m) > 0, \\ 4(6) > 0, \\ 4(2 + m) > 0 \end{cases}$$

Конечно, старший коэффициент трехчлена в неравенствах можно было бы не указывать, так как он положителен. Исключая верные неравенства, получим систему:

$$\begin{cases} m \leq \frac{1}{4}, \\ m > -2, \Leftrightarrow -2 < m \leq \frac{1}{4}, \\ m > -6 \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда дискриминант трехчлена равен нулю, мы считаем, что он, тем не менее, имеет два одинаковых корня.

Ответ: $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$.

Рассмотрим примеры задач, в которых ограничения на величину корней квадратного трехчлена возникают из свойств или области значения функций, входящих в условие задачи.

Пример 90. При всех значениях параметра решить уравнение $25^x - (a-1)5^x + 2a+3 = 0$ и указать, при каких из них оно имеет единственное решение.

Решение. Данный пример прекрасно иллюстрирует перенос свойств квадратного трехчлена в задачи, содержащие трансцендентные функции.

Действительно, из свойств показательной функции следует, что $5^x > 0$ для любого значения переменной.

Поэтому исходная задача будет равносильна следующей: решить систему $\begin{cases} y^2 - (a-1)y + 2a+3 = 0, \\ y > 0 \end{cases}$ и указать, при каких значениях параметра она будет иметь единственное решение. Заметим, что единственность решения не только связана с величиной дискриминанта (как это обычно бывает), но и с величиной корней.

Если один из корней уравнения положителен, а второй равен нулю, то искомые значения параметра будут решениями системы $\begin{cases} -(a-1) < 0, \\ 2a+3 = 0 \end{cases}$. Но если $a = -1,5$, то $-(-1,5-1) > 0$. Поэтому такой вариант нереализуем в условиях данной задачи.

Если уравнению удовлетворяет единственное значение переменной, то искомые значения параметра задаются следующей системой

$$\begin{cases} (a-1)^2 - 4(2a+3) = 0, \\ a-1 > 0 \end{cases}$$

Получим: $\begin{cases} (a-1)^2 - 4(2a+3) = 0, \\ a-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a^2 - 10a - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 11.$

Наконец, система будет иметь решение, если оба корня квадратного трехчлена будут положительны и различны. В этом случае искомые значения параметра будут задаваться системой

$$\begin{cases} (a-1)^2 - 4(2a+3) > 0, \\ a-1 > 0, \\ 2a+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 11.$$

Осталось вернуться к исходным переменным и найти решения.

$$25^x - (a-1)5^x + 2a+3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 11, \\ 5^x = \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 11, \\ x = \log_5 \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2} \end{cases}$$

Отметим, что после проведенного анализа существование корней показательного уравнения доказывать не надо.

Ответ: Если $a < 11$ уравнение решений не имеет, если $a = 11$, то $x = 1$, если $a > 11$, то $x = \log_5 \frac{a-1 - \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$, $x = \log_5 \frac{a-1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$.

Пример 91. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt[3]{8x^3 - 7x + 2} + \sqrt[3]{2x^3 - 7x + 8} = \sqrt[3]{(3a-22)x^3 - (6a+97)x + 3a+32} + \sqrt[3]{(20a-198)x^3 - (40a-607)x + 20a+208}$$

имеет ровно два корня, причем оба они меньше нуля.

Решение. Данная задача хорошо показывает дальнейшее применение разобранных критериев. Уравнения и неравенства подобного

типа, т.е. содержащие большое количество радикалов, конечно, почти никогда невозможно решить традиционными методами решения подобных уравнений. Обычно радикалы можно сгруппировать таким образом, что разности подкоренных выражений будут или равны между собой или получаются друг из друга умножением на какое-либо число (обычно отрицательное).

Заметим также, что если в уравнении участвуют квадратичные иррациональности, то, умножая или деля каждую часть уравнения на сумму ее составляющих, мы получаем уравнение, равносильное исходному уравнению. Если же в уравнение входят иррациональности высших степеней, то каждая часть уравнения умножается и делится на неполный бином суммы.

Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 8} - \sqrt[3]{(20a - 198)x^2 - (40a - 607)x + 20a + 208} = \\ = \sqrt[3]{(3a - 22)x^2 - (6a + 97)x + 3a + 32} - \sqrt[3]{8x^2 - 7x + 2}$$

Умножим и разделим обе части уравнения на неполный квадрат суммы выражений, стоящих в каждой из частей уравнения. Получим:

$$\frac{(3a - 30)x^2 - (6a - 90)x + 3a + 30}{\frac{A^2 + AB + B^2}{C^2 + CD + D^2}} = \\ = \frac{(20a - 200)x^2 - (40a - 600)x + 20a + 200}{C^2 + CD + D^2},$$

где символами A, B, C, D обозначены соответствующие иррациональности.

Таким образом, уравнение будет равносильно следующему уравнению:

$$((a - 10)x^2 - (2a - 30)x + a + 10) \left(\frac{3}{A^2 + AB + B^2} + \frac{20}{C^2 + CD + D^2} \right) = 0.$$

Знаменатели дробей есть выражения, принимающие только положительные значения, поэтому исходная задача может быть переформулирована для уравнения $(a - 10)x^2 - (2a - 30)x + a + 10 = 0$.

Условия, задающие существование различности и отрицательность корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, задаются

$$\text{системой неравенств } \begin{cases} D_f > 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0 \end{cases}.$$

Для данного трехчлена получим:

$$\begin{cases} (2a - 30)^2 - 4(a^2 - 100) > 0, \\ (a - 10)(2a - 30) > 0, \\ (a - 10)(a + 10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 10\frac{5}{6}, \\ 10 < a < 15, \Leftrightarrow 10 < a < 10\frac{5}{6} \\ \begin{cases} a < -10 \\ a > 10 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(10; 10\frac{5}{6} \right)$$

Приведем еще один пример, решение которого в конце преобразований сводится к рассмотрению расположения корней квадратного трехчлена.

Пример 92. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\log_{13(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10})} \left(\log_{11} \left(|2x^2 + 2ax - 7| \right) + 2 \right) \geq 0$ верно при всех значениях переменной x , принадлежащих отрезку $[-4; 2]$.

Решение. Оценим значение основания внешнего логарифма.

Так как: $\sqrt[3]{11} > \sqrt[3]{10}$, то $13(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10}) > 0$.

Сравним $13(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10})$ и 1.

$$\text{Имеем: } (13(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10}) > 1) \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10} > \frac{1}{13} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{11^2} + \sqrt[3]{11 \cdot 10} + \sqrt[3]{10^2}} > \frac{1}{13} \right)$$

Но выполнено верное неравенство:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{11^2} + \sqrt[3]{11 \cdot 10} + \sqrt[3]{10^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{100}} \right), \text{ поэтому сравнивая:}$$

$$\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{100}} > \frac{1}{13} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2700}} > \frac{1}{\sqrt[3]{2197}} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2700}} < \frac{1}{\sqrt[3]{2197}} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (13(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10}) < 1).$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству вида: $\lg(|2x^2 + 2ax - 7| + 1) \leq 1$, которое должно быть верным при всех $x \in [-4; 2]$.

Решим это неравенство:

$$\lg(|2x^2 + 2ax - 7| + 1) \leq 1 \Leftrightarrow |2x^2 + 2ax - 7| + 1 \leq 10 \Leftrightarrow |2x^2 + 2ax - 7| \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2ax - 7 \leq 9, \\ -2x^2 - 2ax + 7 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax - 8 \leq 0, \\ x^2 + ax + 1 \geq 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax - 8$. Первое неравенство может быть выполнено для всех значений $x \in [-4; 2]$, только тогда, когда будет верна система $\begin{cases} f(-4) \leq 0, \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$. Получим:

$$\begin{cases} 16 - 4a - 8 \leq 0, \\ 4 + 2a - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a \geq 8, \\ 2a \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Осталось проверить, будет ли второе неравенство системы верно для найденного значения параметра. Подставив, получим: $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$, что является верным неравенством для любого значения переменной, в том числе и для всех значений $x \in [-4; 2]$.

Ответ: 2.

2.11. Решение симметрических систем уравнений

Одним из наиболее трудных разделов школьной математики является решение систем уравнений. Единственным методом, который рассматривается в учебниках и большом количестве пособий — метод последовательного исключения переменных или метод подстановки. Но этот метод хорош лишь тогда, когда степень системы не слишком высока, и к тому же одно из уравнений — линейное. Однако решение некоторых систем высших степеней основано на применении теоремы Виета.

Теорема Виета. Если квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ имеет корни x_1 и x_2 , т.е. его дискриминант неотрицателен, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Заметим, что выражение суммы и произведения корней квадратного трехчлена остаются неизменными при перестановке корней местами. Такое свойство называется симметричностью.

Обратная теорема. Любые два числа p и q являются корнями квадратного трехчлена $f(x) = a(x^2 - (p+q)x + pq)$, $a \neq 0$ и квадратного уравнения $x^2 - (p+q)x + pq = 0$.

Ее можно переформулировать следующим образом: если задана система уравнений $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases}$, то числа, являющиеся решениями

данной системы, являются корнями уравнения $z^2 - pz + q = 0$, и наоборот, корни квадратного трехчлена являются решениями системы уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$. Заметим, что рассмотренная система не ме-

няется при одновременной перестановке неизвестных. Таким образом, если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то $(y_0; x_0)$ тоже. Решение подобных систем сводится к нахождению суммы и произведения переменных. Введем обозначение $x + y = \sigma_1$, $xy = \sigma_2$. Тогда, например, $x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$ и т.д. Числа x и y в этом случае являются корнями уравнения $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$.

Пример 93. Пусть u и v — корни уравнения $x^2 + 6x - 3 = 0$. Не находя самих корней, найдите значение выражения $\frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2}$.

Решение. Данная задача является одной из наиболее часто встречающихся задач. Так как речь идет о корнях квадратного уравнения, то они связаны симметрической системой уравнений $\begin{cases} u + v = -6, \\ uv = -3 \end{cases}$.

Используя введенные выше обозначения, получим, что

$$\frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2} = \frac{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}, \text{ где } \sigma_1 = -6, \sigma_2 = -3.$$

$$\text{Получим, что } \frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2} = \frac{-216 + 54}{36 - 6} = -5,4$$

Ответ: -5,4.

Пример 94. Вычислите $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$

Решение. Рассмотрим «сопряженное» число $\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$, отличающееся от искомого знаком в подкоренном выражении.

Обозначив первое число через x , а второе — y , и заметив, что $x > y$, получим: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 18, \\ xy = 1 \end{cases}$. Используя введенные выше обозначения, получим, что

$$\begin{cases} \sigma_2 = 1, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 1, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 1, \\ (\sigma_1 - 3)(\sigma_1^2 + 3\sigma_1 + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 1, \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$$

Получим, что искомое число есть больший корень уравнения

$$z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ z = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{ т.е. } \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Ответ: $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$.

Пример 95. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-7} + \sqrt[3]{5-x} = 1$.

Решение. Решим это же уравнение методом составления симметрической системы уравнений.

Пусть $\sqrt[3]{x-7} = a$, $\sqrt[3]{5-x} = b$.

$$\text{Тогда: } \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=-2 \end{cases}$$

Второе уравнение системы подбирается таким образом, чтобы линейная комбинация подкоренных выражений давала бы постоянную величину.

$$\text{Снова делая ту же, по сути, замену, получим: } \begin{cases} a+b=1 \\ ab=1 \end{cases}$$

Вспоминая теорему Виета, имеем, что a и b должны являться корнями квадратного уравнения $z^2 - z + 1 = 0$, которое решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 96. Решите уравнение $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{8+x} = a$, а $\sqrt[3]{8-x} = b$.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ ab=-5 \end{cases}$$

Получим, что a и b — корни уравнения

$$z^2 - z - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{21}+1}{2} \\ z = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

В этом случае нам еще предстоит вычислить значение искомой переменной, решив уравнение $\sqrt[3]{8+x} = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$.

Получим, что $x = 3\sqrt{21} = \sqrt{189}$.

Ответ: $3\sqrt{21}$

Пример 97. Решите уравнение $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{97-x} = a$, $\sqrt[4]{x} = b$.

В новых обозначениях уравнение запишется в виде $a+b=5$. Кроме того, как легко видеть, $a^4+b^4=97$.

$$\text{Получим симметрическую систему уравнений } \begin{cases} a+b=5, \\ a^4+b^4=97 \end{cases}$$

Используя введенные выше обозначения, получим, что

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6 \\ \sigma_2 = 44 \end{cases}$$

Таким образом, a и b могут быть решениями двух квадратных уравнений $y^2 - 5y + 6 = 0$ или $y^2 - 5y + 44 = 0$. Однако второе уравнение решений не имеет.

$$\text{Получим, что } \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = 2, \\ \sqrt[4]{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = 81 \end{cases}$$

Ответ: 16 ; 81.

Пример 98. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ xy(x + y) = 84 \end{cases}$

Решение. Используя введенные выше обозначения, получим, что $\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 19 \\ \sigma_1 \sigma_2 = 84 \end{cases}$

Получим как бы «систему в системе», из которой следует, что σ_1 и σ_2 являются корнями уравнения $z^2 - 19z + 84 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 \\ z = 12 \end{cases}$

Далее получим, что $\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ xy(x + y) = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12 \\ x + y = 12, \\ xy = 7 \end{cases}$

Решения первой системы являются корнями уравнения $z^2 - 7z + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = 4 \end{cases}$, а решения второй системы — корнями

уравнения $z^2 - 12z + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 + \sqrt{29} \\ z = 6 - \sqrt{29} \end{cases}$

Ответ: $(3; 4), (4; 3), (6 + \sqrt{29}; 6 - \sqrt{29}), (6 - \sqrt{29}; 6 + \sqrt{29})$

Пример 99. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61, \\ xy = 12 \end{cases}$

Решение. Обозначим $x + y = \sigma_1, xy = \sigma_2$.

Тогда система запишется в виде $\begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2 = 61, \\ \sigma_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 12, \\ \sigma_1 = 7 \\ \sigma_2 = 12, \\ \sigma_1 = -7 \end{cases}$

Следовательно, система $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61, \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12 \\ x + y = -7, \\ xy = 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 4 \\ x = 4, \\ y = 3 \\ x = -3, \\ y = -4 \\ x = -4, \\ y = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(3; 4); (4; 3); (-3; -4); (-4; -3)$.

К решению симметрических систем может сводиться решение уравнений высших степеней, иррациональных уравнений и т.п.

Пример 100. Найдите действительные решения уравнения $x^4 + (1 - x)^4 = 1$.

Решение. $x^4 + (1 - x)^4 = 1$. Обозначим $y = 1 - x$.

Тогда решение сводится к рассмотрению симметрической системы вида $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x + y = 1 \end{cases}$

Используя введенные обозначения, имеем:

$$x^4 + y^4 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2, \quad \sigma_1 = 1.$$

Относительно новых переменных система примет вид

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 1 - 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0, \\ \sigma_2 = 2 \end{cases}$$

Таким образом $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0 \\ x + y = 1, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \\ x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$

Ответ: $0; 1$

Пример 101. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = b \end{cases}$.

Решение. Данная система — симметрическая, поэтому, используя введенные выше обозначения, получим, что

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 \\ \sigma_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 = a^2 + b \\ \sigma_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b \geq 0, \\ \sigma_2 = b \\ \sigma_1 = \sqrt{a^2 + b} \\ \sigma_1 = -\sqrt{a^2 + b} \end{cases}.$$

Анализируя полученный результат, имеем, что исходная система уравнений может иметь решения при условии, что $a^2 + b \geq 0$, и эти решения будут решениями уравнений $z^2 \pm \sqrt{a^2 + b} \cdot z + b = 0$. Дискриминанты этих уравнений одинаковы и равны $D = a^2 + b - 4b = a^2 - 3b$. Оба уравнения одновременно будут иметь решения или не иметь их.

Следовательно, необходимым и достаточным условием существования решения уравнений, а с ними и системы, является условие существования решений системы $\begin{cases} a^2 + b \geq 0, \\ a^2 - 3b \geq 0 \end{cases}$.

Если $b = 0$, то оба неравенства системы истинны при всех значениях параметра a и тогда $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ |y| = |a| \\ y = 0, \\ |x| = |a| \end{cases}$, т.е. решениями являются любые пары чисел $(0; a), (0; -a), (a; 0), (-a; 0)$.

Если $b < 0$, то второе неравенство системы истинно при любых значениях параметра a , и тогда $\begin{cases} a^2 + b \geq 0, \\ a^2 - 3b \geq 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0, \\ |a| \geq \sqrt{-3b} \end{cases}$.

Если $b > 0$, то истинным становится первое неравенство системы, и поэтому $\begin{cases} a^2 + b \geq 0, \\ a^2 - 3b \geq 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, \\ |a| \geq \sqrt{3b} \end{cases}$.

Во втором и третьем случаях решениями системы будут пары чисел

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - 3b}}{2}; \frac{\sqrt{a^2 + b} - \sqrt{a^2 - 3b}}{2} \right), \\ & \left(\frac{-\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - 3b}}{2}; \frac{-\sqrt{a^2 + b} - \sqrt{a^2 - 3b}}{2} \right), \\ & \left(\frac{\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - 3b}}{2}; \frac{\sqrt{a^2 + b} - \sqrt{a^2 - 3b}}{2} \right) \text{ и} \\ & \left(\frac{-\sqrt{a^2 + b} - \sqrt{a^2 - 3b}}{2}; \frac{-\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - 3b}}{2} \right) \end{aligned}$$

2.12. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов

Пусть требуется найти условие, при котором два квадратных трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ и $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, a_1 \neq 0$ имеют общий корень.

Т е о р е м а. Для того, чтобы квадратные трехчлены $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ имеющие корни, имели бы общий корень, необходимо и достаточно, чтобы их результат $R = (ac_1 - ca_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1)$ был равен нулю.

Пусть требуется найти условие взаимного расположения корней квадратных трехчленов

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \text{ и}$$

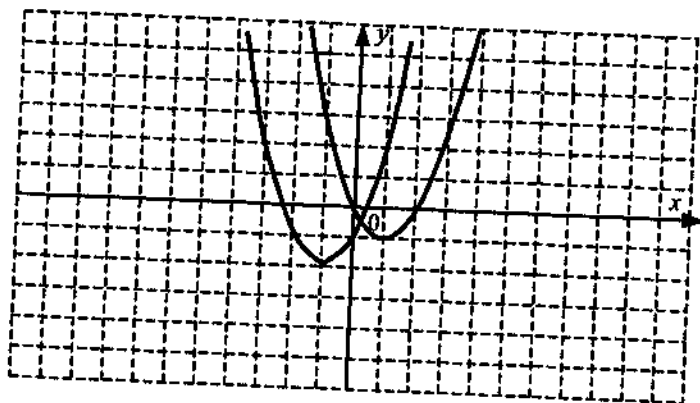
$$g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, a_1 \neq 0.$$

Далее везде в этом пункте мы будем предполагать, что оба трехчлена имеют различные корни, т.е. их дискриминанты положительны.

Вообще существуют шесть различных способов взаимного расположения корней двух квадратных трехчленов.

Два из них отбрасывают случаю, когда корни трехчленов перемешаются, т.е. между корнями каждого из них лежит корень другого.

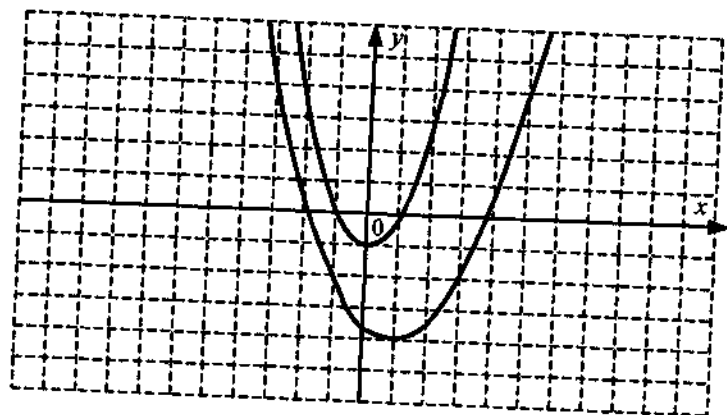
Данный случай представлен на рисунке.



Возможны два варианта расположения корней: $\alpha < \alpha_1 < \beta < \beta_1$ или $\alpha_1 < \alpha < \beta_1 < \beta$.

В обоих случаях, как легко видеть, результат $R < 0$. Если при этом $-\frac{b}{a} < -\frac{b_1}{a_1}$, то реализуется первый случай, если же $-\frac{b_1}{a_1} < -\frac{b}{a}$, то второй.

Два способа расположения корней отвечают случаю, когда оба корня одного трехчлена расположены между корнями другого. Два — потому, что заранее неизвестно, корни какого из двух трехчленов лежат между корнями другого.



В этом случае имеем либо $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, либо $\alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1$, и в обоих случаях $R > 0$.

В этом случае результат положителен: $R = a^2 g(\alpha) g(\beta) = a_1^2 f(\alpha_1) f(\beta_1) > 0$. Это означает, что числа $g(\alpha)$ и $g(\beta)$, $f(\alpha_1)$ и $f(\beta_1)$ одного знака. Этот же знак имеет сумма этих чисел $g(\alpha) + g(\beta)$, $f(\alpha_1) + f(\beta_1)$, которые могут быть вычислены без нахождения корней самих многочленов.

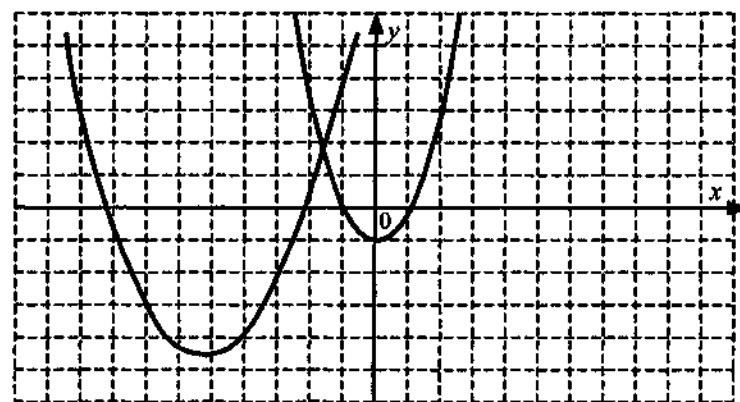
Если произведение $a_1(g(\alpha) + g(\beta)) < 0$, то $g(\alpha)$ и $g(\beta)$ имеют знаки, противоположные знаку первого коэффициента, и в этом случае корни α и β лежат между корнями α_1 и β_1 . Точно так же, если $a(f(\alpha_1) + f(\beta_1)) < 0$, то корни α_1 и β_1 лежат между корнями α и β .

Таким образом, имеем:

$$\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0, \\ a(f(\alpha_1) + f(\beta_1)) < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1 \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0, \\ a_1(g(\alpha) + g(\beta)) < 0 \end{cases}$$

Наконец, рассмотрим еще два случая взаимного расположения корней двух трехчленов: корни не перемежаются, т.е. между корнями одного трехчлена нет ни одного корня другого трехчлена.



В этом случае либо $\alpha < \beta < \alpha_1 < \beta_1$, либо $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha < \beta$.

Легко видеть, что в этом случае $R > 0$. Но, рассуждая, как и ранее, получим, что произведения $a(f(\alpha_1) + f(\beta_1))$ и $a_1(g(\alpha) + g(\beta))$ положительны. Имеем:

$$\alpha < \beta < \alpha_1 < \beta_1 \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0, \\ a(f(\alpha_1) + f(\beta_1)) > 0 \\ -\frac{b}{a} < -\frac{b_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0, \\ a_1(g(\alpha) + g(\beta)) > 0, \\ -\frac{b_1}{a_1} < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Пример 102. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень.

Решение. Решение задачи опирается на два условия: уравнения должны иметь корни, и их результат должен быть равен нулю.

Получим, что искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{cases} 1 - 4a \geq 0, \\ (a - 8)^2 - (1 - a)(a^2 - 8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 4a \geq 0, \\ (a - 8)^2 - (1 - a)(a^2 - 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{4}, \\ a^3 - 24a + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{4}, \\ (a + 6)(a^2 - 6a + 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -6.$$

Ответ: -6 .

Пример 103. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнения $(1 - 2m)x^2 - 6mx - 1 = 0$ и $mx^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень. Вычислить этот корень.

Решение. Формула общего корня квадратных уравнений

$$x_0 = -\frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}.$$

Выпишем результат уравнений:

$$R = (ac_1 - ca_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1)$$

$$\begin{aligned} R &= ((1 - 2m) + m)^2 - ((1 - 2m)(-1) - (-6m)m)((-6m) - 1) = \\ &= (1 - m)^2 + (6m^2 + 2m - 1)(6m + 1) = 36m^3 + 19m^2 - 6m = \\ &= 36m \left(m + \frac{3}{4} \right) \left(m - \frac{2}{9} \right). \end{aligned}$$

Ни при одном из значений параметра m , равном 0 ; $-\frac{3}{4}$; $\frac{2}{9}$ выражение $ab_1 - ba_1 = 6m^2 + 2m - 1$ не обращается в ноль, поэтому при каждом из них уравнения будут иметь общий корень, несмотря даже на то, что при $m = 0$ второе уравнение становится линейным.

Получим: при $m = 0$ общий корень $x_0 = 1$, при $m = -\frac{3}{4}$ общий корень $x_0 = -2$, при $m = \frac{2}{9}$ общий корень $x_0 = 3$.

$$\text{Ответ: } \left\{ 0; -\frac{3}{4}; \frac{2}{9} \right\} \{1; -2; 3\}.$$

Пример 104. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{8}{a} - 2a = 0$ и $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ перемещаются, т.е. между двумя корнями одного уравнения лежит ровно один корень другого.

Решение. Так как нас не интересует в этом случае конкретное расположение корней, то достаточно воспользоваться тем, что $R < 0$.

$$\text{Имеем: } R = (-a + 2a)^2 - \left(\frac{6}{a} - \frac{8}{a} \right)(-8 + 12).$$

$$(-a + 2a)^2 - \left(\frac{6}{a} - \frac{8}{a} \right)(-8 + 12) < 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{8}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{a^3 + 8}{a} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < a < 0.$$

$$\text{Ответ: } (-2; 0)$$

Пример 105. Найдите все значения параметра, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$ не пересекаются, т.е. оба эти уравнения имеют по два корня, и между корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого.

Решение. Во-первых: если оба уравнения имеют по два различных корня, то их дискриминанты положительны.

$$\text{Имеем: } \begin{cases} \frac{9}{a^2} - 8a > 0, \\ \frac{36}{a^2} + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -36 < a^3 < \frac{9}{8}$$

Во-вторых: так как корни уравнений не перемежаются, то результат положителен.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } R &= (-a - 2a)^2 - \left(\frac{12}{a} - \frac{3}{a}\right)(-3 - 24). \\ (-a - 2a)^2 - \left(\frac{12}{a} - \frac{3}{a}\right)(-3 - 24) &> 0 \Leftrightarrow 9a^2 + \frac{9}{a} \cdot 27 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a^3 + 27}{a} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -3 \end{cases} \end{aligned}$$

В-третьих: пусть α, β — корни первого уравнения, а α_1, β_1 — корни второго уравнения.

Тогда получим совокупность условий

$$\begin{cases} \alpha^2 + \frac{12}{a}\alpha - a + \beta^2 + \frac{12}{a}\beta - a > 0 \\ \alpha_1^2 + \frac{3}{a}\alpha_1 + 2a + \beta_1^2 + \frac{3}{a}\beta_1 + 2a > 0 \end{cases}$$

Решая эту совокупность, получим, что

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha^2 + \frac{12}{a}\alpha - a + \beta^2 + \frac{12}{a}\beta - a > 0 \\ \alpha_1^2 + \frac{3}{a}\alpha_1 + 2a + \beta_1^2 + \frac{3}{a}\beta_1 + 2a > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{12}{a}(\alpha + \beta) - 2a > 0 \\ (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \frac{3}{a}(\alpha_1 + \beta_1) + 4a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{a^2} - 4a - \frac{36}{a^2} - 2a > 0 \\ \frac{144}{a^2} - \frac{36}{a^2} > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{a^2 + 2a} < 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 0. \end{aligned}$$

Наконец, объединяя все полученные условия, имеем:

$$\begin{cases} -36 < a^3 < \frac{9}{8} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{-36} < a < \frac{\sqrt[3]{9}}{2} \\ a < -3 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{36} < a < -3 \\ 0 < a < \frac{\sqrt[3]{9}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt[3]{36}; -3) \cup (0; \frac{\sqrt[3]{9}}{2})$.

Рассмотрим ранее разобранный пример (пример 75), решение которого базировалось на тонком наблюдении и обнаружении несоответствия между возможным количеством корней квадратного уравнения и количеством значений переменной, ему удовлетворяющих. Применяя почти все критерии, относящиеся к исследованию квадратного трехчлена, рассмотрим «любовое» решение этого примера, снимая попутно наложенные ограничения.

Пример 106 (75). Даны три уравнения

$$1) x^2 - (a+b)x + 8 = 0; 2) x^2 - b(b+1)x + c = 0; 3) x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый корень первого уравнения является корнем третьего и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c , если $b > 3$. Ответ: 2; 4; 64.

Решение. «Любовое» решение основано на подробном анализе условий задачи и достаточно трудоемком, но поучительном процессе решения.

Пусть x_1 и x_2 — корни первого уравнения. Используя теорему Виста и условия задачи, составим следующую систему:

$$\begin{cases} (a+b)^2 - 32 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = a+b, \\ x_1 x_2 = 8, \\ x_1^4 - b(b+1)x_1^2 + c = 0, \\ x_2^4 - b(b+1)x_2^2 + c = 0, \\ (x_1^2 - b(b+1)x_1 + c)(x_2^2 - b(b+1)x_2 + c) = 0, \end{cases}$$

В данной системе первые три условия — запись теоремы Виета для решений первого уравнения. Четвертое и пятое уравнения — условия того, что каждый из корней первого уравнения есть решение третьего. И, наконец, пятое уравнение — условие того, что хотя бы один из корней первого уравнения является корнем третьего. Не забудем, что в условии даны еще и ограничения на величину корней первого уравнения и величину параметра b . Однако эти ограничения являются условиями отбора решений, а на само решение влияния не оказывают.

Перейдем к анализу. Так как произведение корней первого уравнения равно 8, то, конечно, ни один из них не равен нулю. Используя это условие, заменим четвертое и пятое уравнения системы следующими:

$$\begin{cases} x_1^4 - b(b+1)x_1^2 + c = 0, \\ x_2^4 - b(b+1)x_2^2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4 - x_2^4 - b(b+1)(x_1^2 - x_2^2) = 0, \\ x_1^4 x_2^2 - x_2^4 x_1^2 - c(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение второй системы есть, очевидно, разность первого и второго уравнений первой системы. Второе — есть также разность этих уравнений, однако перед вычитанием каждое из них было умножено на квадрат корня уравнения, ранее не входившего в условие, т.е. первое уравнение было умножено на x_2^2 , а второе, соответственно — на x_1^2 . Группируя в каждом из получившихся уравнений слагаемые и вынося за скобки общие множители, получим:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - b(b+1)) = 0, \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 x_2^2 - c) = 0 \end{cases}$$

1) Случай, когда сумма корней равна нулю, невозможен, т.к. произведение корней положительно, а следовательно, корни имеют значения одного знака.

2) Рассмотрим случай, когда $x_1 = x_2$. В этом случае оба корня равны $2\sqrt{2}$. В этом случае, подставляя найденные значения в оставшиеся уравнения, получим:

$$\begin{cases} a + b = 4\sqrt{2}, \\ 8 - 2\sqrt{2}b(b+1) + c = 0, \\ 64 - 8b(b+1) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4\sqrt{2}, \\ c = 2\sqrt{2}b(b+1) - 8, \\ (8 - 2\sqrt{2})b(b+1) - 56 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4\sqrt{2}, \\ b(b+1) = \frac{28}{4 - \sqrt{2}}, \\ c = \frac{56\sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} - 8 \end{cases}$$

Найдем значения параметров, решив полученные уравнения или просто вычислив их.

$$\begin{aligned} c &= \frac{56\sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} - 8 = \frac{56\sqrt{2}(4 + \sqrt{2})}{14} - 8 = 4\sqrt{2}(4 + \sqrt{2}) - 8 = 16\sqrt{2}. \\ b^2 + b - 2(4 + \sqrt{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Если учитывать условие $b > 3$, то $b^2 + b > 12$, а $8 + 2\sqrt{2} < 12$, поэтому решений, удовлетворяющих данной задаче, нет. Однако мы ищем все решения этой задачи, поэтому

$$\begin{aligned} b^2 + b - 2(4 + \sqrt{2}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{2} \\ b = -1 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ т.к.} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{2} \\ b = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \\ D &= 1 + 8(4 + \sqrt{2}) = 33 + 8\sqrt{2} = (4\sqrt{2} + 1)^2 \end{aligned}$$

т.к. дискриминант этого уравнения

$$D = 1 + 8(4 + \sqrt{2}) = 33 + 16\sqrt{2} = (1 + 4\sqrt{2})^2.$$

Осталось вычислить значения последнего параметра. Если $b = 2\sqrt{2}$, то $a = 2\sqrt{2}$. Если же $b = -1 - 2\sqrt{2}$, то $a = 6\sqrt{2} + 1$. Следовательно, если не учитывать условия $b > 3$, то задача будет иметь, как минимум, два решения: $(6\sqrt{2} + 1; -1 - 2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

3) Рассмотрим теперь случай, когда выполнена система $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = b(b+1), \\ x_1^2 x_2^2 = c \end{cases}$. Из данной системы сразу получим, что $c = 64$.

Осталось найти оставшиеся значения параметров. Используем последнее уравнение системы.

$$(x_1^2 - b(b+1)x_1 + 64)(x_2^2 - b(b+1)x_2 + 64) = 0 \Leftrightarrow$$

$$c > (x_1 x_2)^2 - b(b+1)x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 64(x_1^2 + x_2^2) + (b(b+1))^2 x_1 x_2 - 64b(b+1)(x_1 + x_2) + 64^2 = 0$$

По теореме Виета получим $b(b+1) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (a+b)^2 - 16$. Делая соответствующую замену и обозначая $a+b=t$, получим уравнение $t^4 - 9t^3 - 24t^2 + 144t + 648 = 0$. По следствию теоремы Безу (см. «Решение уравнений высших степеней») получим, что

$$t^4 - 9t^3 - 24t^2 + 144t + 648 = 0 \Leftrightarrow (t-6)(t-9)(t^2 + 6t + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ t=9 \end{cases}$$

Получим следующие системы $\begin{cases} a+b=6 \\ b(b+1)=20 \end{cases}$ и $\begin{cases} a+b=9 \\ b(b+1)=65 \end{cases}$. Решая первую систему, получим наборы параметров, которые могли бы удовлетворять задаче без учета ограничения $b > 3$. $\begin{cases} b=4, \\ a=2 \end{cases}, \begin{cases} b=-5, \\ a=11 \end{cases}$.

С учетом условия $b > 3$ удовлетворять задаче будет только первый набор значений.

Решения второй системы также не будут удовлетворять условию исходной задачи, так как если произведение корней равно 8, а сумма 9, то один корень равен 1, а второй — 8. Это противоречит условию, наложенному на величину корней первого уравнения.

Тем не менее, найдем значения параметров:

$$\begin{cases} b = \frac{-1 - \sqrt{261}}{2}, \\ a = \frac{19 + \sqrt{261}}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b = \frac{-1 + \sqrt{261}}{2}, \\ a = \frac{19 - \sqrt{261}}{2} \end{cases}$$

Таким образом, полному условию задачи удовлетворяет лишь набор $(2; 4; 64)$.

Ответ: $(2; 4; 64)$.

Пример 107 (ЕГЭ). Задача С3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых значение выражения $(x+2)(x^2+2x-3)$ не

равно значению выражения $a\left(x - \frac{3}{x} + 2\right)$ ни при одном значении переменной $x \in [-2; 0)$.

Решение. Так как $x \in [-2; 0)$, то условие исходной задачи равносильно следующему: найти все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} (x+2)(x^2+2x-3) = a\left(x - \frac{3}{x} + 2\right) \\ -2 \leq x < 0 \end{cases}$ не имеет решения.

Проводя равносильные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x+2)(x^2+2x-3) = a\left(x - \frac{3}{x} + 2\right) \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(x^2+2x-3) = a(x^2+2x-3) \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+2x)(x^2+2x-3) - a(x^2+2x-3) = 0, \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+2x-a)(x^2+2x-3) = 0, \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2+2x-a=0 \\ x^2+2x-3=0 \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-a=0, \\ x=-3, \\ x=1, \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-a=0, \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Введем новую переменную. Квадратичная функция $y = x^2 + 2x$, заданная на промежутке $[-2; 0)$, имеет множеством значений отрезок $[-1; 0]$. Это означает, что если $-2 \leq x < 0$, то $-1 \leq y \leq 0$. Тогда полученная система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} y - a = 0, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq a \leq 0, \\ y = a \end{cases}$$

Полученная система, а вместе с ней и исходная задача не будут иметь решения, если $a < -1$ или $a > 0$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Приведем несколько примеров из различных разделов курса алгебры, решение которых сводится к применению теории квадратного трехчлена.

Пример 108. Найдите значения параметра, при которых уравнение $1 + p \sin x = p^2 - \sin^2 x$ имеет решение.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin^2 x + p \sin x + 1 - p^2 = 0$ и рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + pt + 1 - p^2$. Сведение решения тригонометрического уравнения с параметром к рассмотрению свойств корней квадратного трехчлена, получающегося в результате простой замены, является самой часто встречающейся заменой подобного рода.

Исходное уравнение будет иметь решение лишь в том случае, когда хотя бы один из корней квадратного трехчлена $f(t)$ будет принадлежать отрезку $[-1; 1]$.

Для этого необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$\text{либо } f(1) \cdot f(-1) \leq 0, \text{ либо } \begin{cases} D_f \geq 0, \\ f'(-1) \leq 0, \\ f(-1) \geq 0, \\ f'(1) \geq 0, \\ f(1) \geq 0, \end{cases}$$

Первое условие отвечает случаю, когда на отрезке $[-1; 1]$ лежит ровно один корень трехчлена, а второй — когда на отрезке оба корня. Искомые значения параметра будут задаваться совокупностью этих условий.

В первом случае получим:

$$\begin{aligned} (2 + p - p^2)(2 - p - p^2) &\leq 0 \Leftrightarrow (p + 2)(p + 1)(p - 1)(p - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq p \leq -1 \\ 1 \leq p \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |p| \leq 2. \end{aligned}$$

Во втором случае получим:

$$\begin{cases} 5p^2 - 4 \geq 0, \\ p - 2 \leq 0, \\ -p^2 - p + 2 \geq 0, \\ p + 2 \geq 0, \\ -p^2 + p + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |p| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ -2 \leq p \leq 2, \\ -1 \leq p \leq 2, \\ -2 \leq p \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 1.$$

Объединяя полученные решения, получим, что искомыми значениями параметра являются значения, удовлетворяющие неравенству $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 2$.

$$\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 2.$$

Пример 109. Решите уравнение $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - (a + 3) = 0$ при всех значениях параметра.

Решение. Так как предстоит рассматривать величину корней квадратного трехчлена и их расположение относительно отрезка $[-1; 1]$, то полезно первым шагом найти дискриминант соответствующего трехчлена. В простейших случаях это может привести к значительному упрощению рассматриваемого уравнения, а во всех остальных все равно является необходимой частью решения.

$$\text{Итак: } D = (a + 2)^2 + 4(a + 3) = a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2.$$

Так как дискриминант есть полный квадрат, то исходное уравнение может быть без труда заменено совокупностью простейших уравнений.

$$\begin{aligned} \cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - (a + 3) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{a + 2 - a - 4}{2} \\ \cos^2 x = \frac{a + 2 + a + 4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = -1 \\ \cos^2 x = a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \cos^2 x = a + 3. \end{aligned}$$

Простейшее тригонометрическое уравнение $\cos^2 x = a + 3$ имеет решение лишь при $0 \leq a + 3 \leq 1$, т.е. при $-3 \leq a \leq -2$.

И при любом из этих значений параметра

$$x = \pm \arccos \sqrt{a+3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \arccos \sqrt{a+3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, если $-3 \leq a \leq -2$.

Пример 110. При каких значениях параметра существует решение уравнения $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$?

Решение. Решение данного уравнения дает прекрасную возможность проиллюстрировать один из основополагающих принципов решения любых задач с параметрами — принцип произвольности выбора в качестве параметра любой из входящих в задачу переменных.

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ a + \sqrt{a + \sin x} = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin^2 x - a \geq 0, \\ a + \sin x = \sin^4 x - 2a \sin^2 x + a^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Применяя алгоритм решения иррационального уравнения, мы привели исходное уравнение к равносильной ему системе. Одна неприятность — возникшее тригонометрическое уравнение — уравнение четвертой степени с параметром.

Применим принцип произвольности выбора параметра. Объявим переменной бывший параметр a , а параметром — бывшую искомую функцию $\sin x$. Относительно a уравнение имеет вторую степень и записывается в виде: $a^2 - a(2 \sin^2 x + 1) + (\sin^4 x - \sin x) = 0$.

Вычислим дискриминант.

$$D = (2 \sin^2 x + 1)^2 - 4(\sin^4 x - \sin x) = 4 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 = (2 \sin x + 1)^2.$$

Дискриминант есть полный квадрат, поэтому уравнение распадается на совокупность более простых уравнений:

$$\begin{cases} a = \sin^2 x + \sin x + 1 \\ a = \sin^2 x - \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin x + 1 - a = 0 \\ \sin^2 x - \sin x - a = 0 \end{cases}$$

Возникают два уравнения, относительно которых ставится ранее рассмотренный вопрос: при каких значениях параметра хотя бы один из корней одного из уравнений принадлежит отрезку $[-1; 1]$?

Однако надо учесть, что эти уравнения входят в систему, которая содержит еще два условия $\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin^2 x - a \geq 0 \end{cases}$. При этих ограничениях

первое уравнение совокупности решений не имеет. Поэтому достаточно рассмотреть только второе уравнение.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - t - a, t \in [-1; 1]$. Для того чтобы данный квадратный трехчлен имел бы на отрезке $[-1; 1]$ хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы ордината вершины параболы была бы отрицательна, а хотя бы в одной из граничных точек отрезка $[-1; 1]$ значения самого трехчлена были бы, напротив, неотрицательны (мы используем то, что абсцисса вершины параболы равна $\frac{1}{2}$).

Таким образом, искомые значения параметра задаются следующими условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - a \leq 0, \\ -a \geq 0 \\ 2 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{4} \\ a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq a \leq 0.$$

Второе решение. Из условия уравнения следует, что $0 \leq \sin x \leq 1$. Сделаем замену $t = \sin x, 0 \leq t \leq 1$ и рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t+a}$. Тогда на отрезке $[0; 1]$ при каждом из искомых значений параметра функция является монотонно возрастающей.

Уравнение запишется в виде $f(f(t)) = t$, которое в силу монотонности функции будет равносильно уравнению $f(t) = t$. Таким образом:

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x \Leftrightarrow \sqrt{a + \sin x} = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin^2 x - \sin x - a = 0 \end{cases}$$

Таким образом, при втором решении мы приходим к единственному уравнению, которое может иметь решение. Решая далее, как в предыдущем случае, сразу получим, что $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Ответ: $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Вообще использование общих свойств функций является достаточно часто встречающимся приемом при решении многих задач, в том числе и содержащих тригонометрические составляющие.

Пример 111. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение. Еще один пример на использование свойств функций, входящих в уравнение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2$, определенную при всех значениях аргумента, и как хорошо видно, четную.

Поэтому, если при каком-либо значении параметра a_0 уравнение $x^2 - 2a_0 \sin(\cos x) + a_0^2 = 0$ имеет решение $x = x_0$, то число $x = -x_0$ также будет решением данного уравнения.

Поэтому необходимым условием единственности решения является совпадение этих значений, т.е. $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Таким образом, для того чтобы уравнение могло бы иметь единственное решение, необходимо, чтобы число $x_0 = 0$ являлось решением.

Теперь найдем те значения параметра, при которых $x_0 = 0$ — решение.

$$\text{Подставив, получим, что } a^2 - 2a \sin 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \sin 1 \end{cases}$$

Наконец из найденных значений параметра отберем те, которые удовлетворяют условию задачи.

Если $a = 0$, то уравнение приобретает вид $x^2 = 0$ и имеет единственное решение $x_0 = 0$.

Если $a = 2 \sin 1$, то уравнение запишется в виде $x^2 - 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4 \sin^2 1 = 0$

Теперь заметим, что так как $|\cos x| \leq 1$, то $0 \leq \sin(\cos x) \leq \sin 1$, поэтому $-4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4 \sin^2 1 \geq 0$, причем равенство верно только при $x = 0$. Следовательно, при $a = 2 \sin 1$ уравнение также имеет единственное решение $x_0 = 0$.

Ответ: $0; 2 \sin 1$.

Пример 112. Решите уравнение.

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} \cdot 3^x + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \cdot 2^x = 2^{2x+1}.$$

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)^2} = 2\sqrt{2} - 1.$$

Представив также $2^{2x+1} = 2 \cdot 4^x$, запишем уравнение в виде

$$(3 - 2\sqrt{2}) \cdot 3^x + (2\sqrt{2} - 1) \cdot 2^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{2}) \left(\frac{3}{4}\right)^x + (2\sqrt{2} - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Левая часть уравнения есть монотонно убывающая функция. Поэтому, как следует из уравнения, $x = 0$ — единственное решение уравнения.

Ответ: 0.

Пример 113. Найдите все значения параметра a , при каждом из

$$\text{которых система } \begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leq 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4} \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases} \text{ имеет ре-}$$

шение, но среди этих решений нет ни одного, удовлетворяющего условию $x + y = 0$.

Решение. Разделив обе части первого неравенства на 2^{x^2+4y} , получим, что неравенство приобретет следующий вид: $2^{2x^2+2y^2+8x-8y+4} - 33 \cdot 2^{x^2+y^2+4x-4y+4} + 32 \leq 0$. Рассматривая левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно $2^{x^2+y^2+4x-4y+4}$, разложим данное выражение на множители.

$$2^{2x^2+2y^2+8x-8y+4} - 33 \cdot 2^{x^2+y^2+4x-4y+4} + 32 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2+y^2+4x-4y+4} - 32)(2^{x^2+y^2+4x-4y+4} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2^{x^2+y^2+4x-4y+4} \leq 32 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 \leq 5 \Leftrightarrow$$

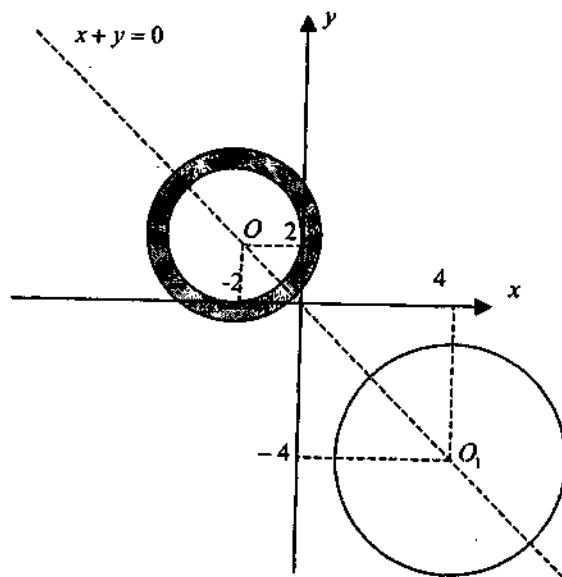
$$\Leftrightarrow 4 \leq (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 9$$

Таким образом, первое неравенство системы задает на координатной плоскости кольцо, ограниченное двумя концентрическими ок-

ружностями с центром в точке $(-2; 2)$ и радиусами, равными соответственно 2 и 3.

Преобразуем второе уравнение данной системы $x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+4)^2 = a+32$.

Следовательно, уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром в точке $(4; -4)$ и радиусом, зависящим от параметра и равным $\sqrt{a+32}$, $a \geq -32$.



Искомая система будет иметь хотя бы одно решение, если окружность, имеющая меняющийся радиус, будет иметь с кольцом хотя бы одну точку. Однако среди решений не будет решений, удовлетворяющих условию $x+y=0$, если окружность будет иметь две точки пересечения только с внутренней окружностью кольца. Заметим, что в этом случае должно выполняться условие $OO_1 - 2 < \sqrt{a+32} < OO_1 + 2$. $OO_1 = 6\sqrt{2}$.

Получим:

$$6\sqrt{2} - 2 < \sqrt{a+32} < 6\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 76 - 24\sqrt{2} < a+32 < 76 + 24\sqrt{2} \Leftrightarrow 44 - 24\sqrt{2} < a < 44 + 24\sqrt{2}$$

Ответ: $(44 - 24\sqrt{2}; 44 + 24\sqrt{2})$.

Пример 114. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} = 7\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{a^2 - 9a + 18}$$

имеет единственное решение.

Решение. Прежде всего найдем область допустимых значений переменной x , учитывая, что под корнем квадратным может стоять выражение, принимающее только неотрицательные значения.

$$\begin{cases} -4x^3 + 11x^2 + 60x - 67 \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(-4x^2 + 7x + 67) \geq 0, \\ (x-1)(x-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7 - \sqrt{1121}}{8} \\ 1 \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{1121}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} - 7\sqrt{6x - x^2 - 5} = \sqrt{a^2 - 9a + 18}.$$

Рассмотрим его левую часть.

Вынося общий множитель, получим:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} - 7\sqrt{6x - x^2 - 5} = \\ & = \sqrt{x-1} \left(\sqrt{-4x^2 + 7x + 67} - 7\sqrt{5-x} \right) = \\ & = \sqrt{x-1} \left(\frac{-4x^2 + 7x + 67 - 49(5-x)}{\sqrt{-4x^2 + 7x + 67} + \sqrt{5-x}} \right) = \\ & = \sqrt{x-1} \left(\frac{-4x^2 + 56x - 178}{\sqrt{-4x^2 + 7x + 67} + \sqrt{5-x}} \right) = \\ & = \sqrt{x-1} \left(\frac{18 - 4(x-7)^2}{\sqrt{-4x^2 + 7x + 67} + \sqrt{5-x}} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим монотонность функций, входящих в данное выражение.

1) $y = \sqrt{x-1}$ возрастает на $[1; 5]$

2) $y = 18 - (x-7)^2$ также возрастает на $[1; 5]$

3) $y = -4x^2 + 7x + 67$ убывает на $[1; 5]$, следовательно, $y = \sqrt{-4x^2 + 7x + 67}$ тоже.

4) $y = \sqrt{5-x}$ убывает на $[1; 5]$.

Таким образом, числитель выражения есть произведение двух возрастающих на $[1; 5]$ функций, следовательно, также возрастающая функция. Знаменатель — сумма двух убывающих функций, и следовательно, убывающая на $[1; 5]$ функция.

Таким образом, левая часть уравнения — возрастающая на $[1; 5]$ функция.

$$f(x) = \sqrt{x-1} \left(\frac{18 - 4(x-7)^2}{\sqrt{-4x^2 + 7x + 67} + \sqrt{5-x}} \right).$$

Получим, что если уравнение $f(x) = \sqrt{a^2 - 9a + 18}$ имеет решение, то только одно.

$$\min_{[1; 5]} f(x) = f(1) = 0, \quad \max_{[1; 5]} f(x) = f(5) = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, уравнение будет иметь единственное решение, если $0 \leq \sqrt{a^2 - 9a + 18} \leq 2\sqrt{2}$.

$$0 \leq \sqrt{a^2 - 9a + 18} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 9a + 18 \geq 0, \\ a^2 - 9a + 18 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 3 \\ a \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9 - \sqrt{41}}{2} \leq a \leq \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \\ 6 \leq a \leq \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{9 - \sqrt{41}}{2}; 3 \right] \cup \left[6; \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \right].$$

Пример 115. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29} \end{cases}$$

Решение. В формулировке задачи явно просматриваются геометрические мотивы.

Действительно, уравнение $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0$ легко приводится к виду: $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 16$. Геометрическое место точек, заданное этим уравнением — окружность с центром в точке $(7; 5)$ и радиуса $R = 4$.

Гораздо интереснее выяснить, какое геометрическое место точек задано вторым уравнением системы.

Преобразуем его, выделяя полные квадраты под каждым из корней.

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow$$

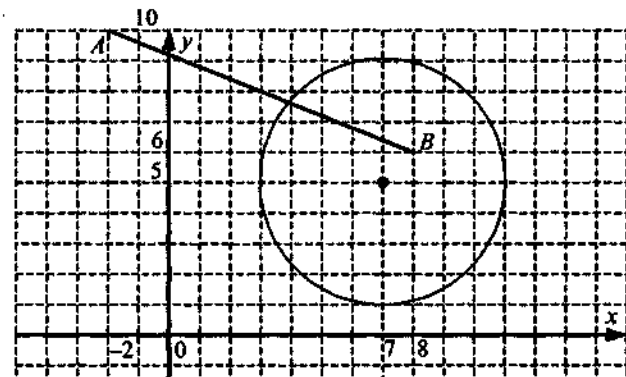
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} = 2\sqrt{29}.$$

Остается дать правильное толкование уравнения. Геометрическое место, заданное этим уравнением, есть множество точек, сумма расстояний от которых до точек с координатами $(8; 6)$ и $(-2; 10)$ равна $2\sqrt{29}$.

Однако расстояние между точками $(8; 6)$ и $(-2; 10)$ равно $2\sqrt{29}$!

Следовательно, геометрическое место — это отрезок прямой с концами в точках $(8; 6)$ и $(-2; 10)$.

Действительно, если некоторая точка $M(x; y)$ не принадлежит данной прямой, то сумма расстояний от нее до точек $B(8; 6)$ и $A(-2; 10)$ больше, чем расстояние между ними (неравенство треугольника). Если же точка $M(x; y)$ лежит на прямой, но вне отрезка, то длина отрезка есть разность расстояний от нее до концов отрезка.



Составим уравнение прямой AB .

$$\frac{x+2}{8+2} = \frac{y-10}{6-10} \Leftrightarrow \frac{x+2}{10} = \frac{y-10}{-4} \Leftrightarrow y-10 = -\frac{2}{5}(x+2) \Leftrightarrow 5y = -2x+46.$$

Выразим из этого уравнения какую-нибудь переменную через оставшуюся. Например, $x = -\frac{5}{2}y + 23$.

Получим систему:

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ x = 23 - \frac{5}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 - \frac{5}{2}y, \\ \left(16 - \frac{5}{2}y\right)^2 + (y-5)^2 = 16 \end{cases}$$

Решим второе уравнение. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем:

$$\frac{29}{4}y^2 - 90y + 265 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29} \\ y = \frac{180 - 2\sqrt{415}}{29} \end{cases}$$

Первое значение соответствует ординате точки, расположено на отрезке AB . Найдем абсциссу: $x = 23 - \frac{5}{2}y = \frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}$.

Ответ: $\left(\frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$.

Получив результат, еще надо проверить, что он — правильный!

Задачный материал

Задачный материал предназначен для самостоятельной работы, расширения и углубления основных приемов, методов и идей решения задач с параметрами. В него включены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ведущих вузах РФ: МГУ, МФТИ, МИФИ, ВШЭ и др. В задачный материал вошли около 500 различных задач — от самых простых до самых сложных.

§ 1. Линейное уравнение. Линейная функция

1.1. Формулировка понятия «уравнение», «корень уравнения»

1. Укажите постоянные и переменные величины, входящие в уравнения.

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1) $7x - 1 = a$ | 6) $x = a - a^2x$ |
| 2) $a - x = a^2x - 1$ | 7) $x = a^3x$ |
| 3) $5 - x = ax$ | 8) $ax - a^2 = 7$ |
| 4) $ax - a = 1 + x$ | 9) $ax - a^2 = 4 - x$ |
| 5) $6 = ax$ | 10) $3 - a^2x = x - a$ |

2. Укажите уравнения, линейные относительно переменной x , содержащие и не содержащие параметры.

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| 1) $x + 3 = 13x - 2$ | 6) $3x + 6 = 3(x - 1) + 4$ |
| 2) $(a - 1)x = 3$ | 7) $5 - x = (a + 1)x$ |
| 3) $12x - a = 12$ | 8) $2x - (x - 19) = -x$ |
| 4) $bx - a = 1$ | 9) $x = (a - 1)^2x$ |
| 5) $-5x = 4$ | 10) $5x = 2 - (12 - 5x)$ |

3. Найдите все значения параметра x , при котором уравнение $(a^2 + 1)x + a + 1 = 0$ является линейным.

4. Будет ли линейным относительно переменной x уравнение: $(a^2 + 1)x + a + 1 = 0$?

1.2. Общий вид линейного уравнения с одним параметром. Допустимые значения параметра

5. Решите уравнение при всех значениях параметра.

- $$\begin{array}{ll} 1) ax = 4 & 3) 4 + kx = 5x + 1 \\ 2) ax - a = 4 - x & 4) (b^2 - 1)x = (b - 1) \end{array}$$

6. При каком значении параметра a уравнение $ax = x$ обращается в тождество?

7. Найдите значение переменной x , которое не может быть решением уравнения $4 - tx = 3x - 1$ ни при одном значении параметра t .

8. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение не имеет решения.

- 1) $ax = 2x + 1$
- 2) $px = x + 1$
- 3) $a^2x + 2ax + x = 1$
- 4) $a^2x = a(x + 2) - 2$

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корень уравнения $2x - 28,5 = 2a(6x - 1) + 35$ в два раза больше корня уравнения $4x + 1 = 2(3 - 2x)$.

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корень уравнения $3x(a+4) = 6a+35$ в три раза меньше корня уравнения $2(-x-1) = 3(2-x)$.

11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корень уравнения $a(2x-1) - \frac{5}{7} = 4a - x$ в полтора раза больше корня уравнения $\frac{1}{2}(x-2) = 3(3-x)$.

12. Решите уравнения:

- $$\begin{array}{ll} 1) m^2x = m(x+2) - 2 & 2) m^2(x-2) - 3m = x+1 \\ 3) x - \frac{2}{m^3} = \frac{1}{m^2}(4x+1) & 4) ax+b - \frac{3x+2ab}{3} = \frac{1}{2} \\ 5) a^2x+4 = a(x+2)+b & 6) (a+x)(1+bx) = a(1+b) + a^2b^2 + bx^2 \\ 7) (a+x)(b+x) = a(b+1) + \frac{a^2}{b} + x^2 \end{array}$$

$$8) \frac{2x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{3ax + (a-b)^2}{ab}$$

$$9) (x-a)(2x-b)^2 - (x-b)(2x-a)^2 = 0$$

$$10) (x-a)^3(x+2b+a)-(x+b)^3(x-2a-b)=0$$

13. Решите уравнения

$$1) \frac{a-x}{a-b} - \frac{x-b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$2) \frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{a-b}$$

$$3) \frac{(a+x)(a-b)}{a+b} + \frac{(a-x)(a+b)}{a-b} = \frac{(x-a)(a^2 - 6ab + b^2)}{a^2 - b^2}$$

$$4) \frac{x}{a^2 - b^2} + \frac{2x}{a - b} + \frac{a + b - 1}{2(a - b)} = \frac{x}{a - b} + 1$$

$$5) \frac{x}{2b} + \frac{4b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{x}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$6) \frac{a-x}{a-b} + \frac{a+x}{a+b} + \frac{x}{2} = \frac{abx}{a^2-b^2} + \frac{(a-b)x}{2(a+b)}$$

$$7) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

14. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $b^4x + b^2 - (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$ имеет бесконечно много решений.

15. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $|a|(a^2 + 2)x + a^2(a + \sqrt{5}) = \sqrt{5}a^2x + a^2 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5}x + (6 + \sqrt{5})a$ имеет бесконечно много решений.

16. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4x + b^2(b + \sqrt{3})$ не имеет решений.

17. Найдите все значения переменной x , которые не могут быть решением уравнения ни при одном значении параметра.

- $$\begin{array}{ll} 1) ax - 7 = 2x + 10 & 3) ax = 2x + 1 \\ 2) 2x - 4a = ax - 1 & 4) 2mx + 3 = 2m - x \end{array}$$

18. 1) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax = 2x + 1$ не имеет решений.

2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x + 2ax + x + 1 = 0$ не имеет решений.

3) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x = a(x + 2) - 2$ не имеет решений.

4) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x - x = a - 1$ обращается в тождество.

5) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2x - x = a - 1$ не имеет решений.

1.3. Решение линейных неравенств

19. Решите неравенства.

- 1) $x - 3 > 0$ 2) $2x + 3 > 0$
3) $-3x + 4 > 0$ 4) $-5x - 2 < 0$
5) $-2x + 6 < 0$

20. Решите неравенства.

- 1) $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$ 2) $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$
3) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$ 4) $\frac{x}{2} - 3 > \frac{x+1}{4} + 5$
5) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$

21. Решите неравенства.

- 1) $12 - ax > 3x + 4$ 2) $a^2 - x - ax > 1$
3) $x - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}$ 4) $\frac{x-1}{a-1} + x < \frac{1}{1-a}$ 5) $\frac{x-a}{2a-1} \geq 0$

22. Решите неравенства.

- 1) $ax \leq 1$ 2) $\frac{mx-1}{3} - \frac{2x-m}{4} < \frac{m^2}{12}$
3) $(a^2 - 1)x > a - 1$ 4) $m(x - 2) > x - 3$
5) $\frac{mx}{m-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$

23. Решите неравенства относительно переменной x

- 1) $m(x-1) > x-2$ 7) $ax + 16 \leq 4x + a^2$
2) $2ax + 5 > a + 10x$ 8) $mx > 1 + 3x$
3) $mx - 6 \leq 2m - 3x$ 9) $mx < 4 - 2x$
4) $3(2a - x) < ax + 1$ 10) $x - 5 > nx - 1$
5) $x - \frac{2(a-1)}{a} \leq \frac{2}{3a}$ 11) $5 + kx \leq 5x + k$
6) $ax - a^2 \geq x - 1$

24. Решите неравенства

- 1) $\frac{2x-m}{(m-2)(x+3)} - \frac{m}{m-2} < \frac{3}{x+3}$ 5) $\frac{2x+1}{(a-1)x} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{x}$
2) $\frac{mx}{m-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$ 6) $\frac{x}{a+2} > 2x - a$
3) $\frac{(a+2)x}{a-1} - \frac{2}{3} < 2x - 1$ 7) $\frac{x}{a-4} \geq 3x - 2a$
4) $\frac{ax-3}{x-3} - \frac{a}{2} < a - 1$

25. Решите неравенства

- 1) $5|x| > |x-a|$ 6) $|x+a| \leq x$
2) $|x+1| - |x-1| \geq a(x+1)$ 7) $|ax| \geq 1+x$
3) $|1+x| \leq ax$ 8) $|2x+a| > \frac{3a}{2} + |x-a|$
4) $|x-1| \geq ax$ 9) $|1-|x|| < a-x$
5) $|x-a| \geq x$ 10) $a + \frac{4a^2}{|x-2a|} \geq 0$

26. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых всякое решение неравенства $ax + x - 3a + 1 > 0$ является решением неравенства $x < a$.

27. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых всякое решение неравенства $ax + x + 1 < 0$ является решением неравенства $1 < x < 2$.

28. При каких значениях параметра решение уравнения

- 1) $6 - 3b + 4bx = 4b + 12x$ меньше 1;
2) $5x - 18m = 21 - 5mx - m$ больше 3
3) $15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$ меньше 2;

$$4) \frac{a+x}{a} - 2 = \frac{x+2}{2} \text{ больше } 0.$$

$$5) \frac{4x+3a}{3} = \frac{5x-2k}{4} \text{ меньше } 0.$$

29. Решите уравнения

$$1) |x+3| - a|x-1| = 4 \quad 3) |x-2| + a|x+3| = 5$$

$$2) a|x+3| + 2|x+4| = 5 \quad 4) 3|x-2| - a|2x+3| = 11,5$$

30. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство $|x-a| + |2x-4| \geq 6$ верно для любого значения переменной x .

1.4. Линейное уравнение с двумя переменными. Формирование первоначального понятия функции

31. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой, заданной уравнением $y = 2x + 1$ и проходящей через начало координат.

32. Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

33. Составьте уравнение семейства прямых, не перпендикулярных оси абсцисс и проходящих через точку $(2; 3)$.

34. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями $y = ax + 5$ и $2y - 3x + b = 0$, зная, что первая прямая проходит через точку $A(-2; 3)$, а вторая — через точку $B(3; 4)$.

35. Найдите все значения параметра t , при котором три точки M, N, K с координатами $(1; 1)$, $(8; 2)$, $(7t + 29; 2t - 1)$ соответственно лежат на одной прямой.

36. Прямая, заданная уравнением $y = kx + p$, параллельна прямой, заданной уравнением $x - 2y = 1$, и проходит через точку $M(-3; 2)$, найдите значения параметров k и p .

37. Известно, что график линейной функции $y = ax + b$ проходит через точки A и B . Найдите координаты точки $C(x_c; y_c)$, принадлежащей той же прямой, если:

$$1) A(1; 5), B(3; 9), y_c = 7 \quad 4) A(4; -1), B(1; 3), y_c = 1$$

$$2) A(2; 6), B(-2; 2), y_c = 9 \quad 5) A(0; 1), B(-5; -14), x_c = 6$$

$$3) A(-1; 4), B(5; -2), y_c = 5$$

38. Определите значение параметра k , при котором прямая $y = kx + 2$ параллельна прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 1$.

1.5. Расстояние от точки до прямой

39. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением:

$$1) x - 2y - 2\sqrt{5} = 0$$

$$6) 3x - y + \sqrt{10} = 0$$

$$2) x - y - 2\sqrt{2} = 0$$

$$7) x + 3y - \sqrt{40} = 0$$

$$3) 2x - y + 4\sqrt{5} = 0$$

$$8) 2x - 3y + \sqrt{13} = 0$$

$$4) x - 2y + 2\sqrt{5} = 0$$

$$9) y - 4x - \sqrt{17} = 0$$

$$5) y - 2x + \sqrt{5} = 0$$

$$10) 4x + y + \sqrt{17} = 0$$

40. 1) Найдите ординату точки пересечения графика линейной функции $f(x) = kx + p$ и оси ординат, если график искомой функции параллелен прямой, заданной уравнением $y = 2x + 7$ и проходит через точку $M(1; -1)$.

2) Найдите ординату точки пересечения графика линейной функции $f(x) = kx + p$ и оси ординат, если график искомой функции параллелен прямой, заданной уравнением $y = -x + 5$ и проходит через точку $M(2; -9)$.

3) Найдите абсциссу точки пересечения графика линейной функции $f(x) = kx + p$ и оси абсцисс, если график искомой функции проходит через точки $M(2; 11)$ и $N(-1; -10)$.

4) Найдите координаты точки пересечения графика линейной функции $f(x) = kx + p$ и оси ординат, если график искомой функции проходит через точки $M(6; 0)$ и $N(3; 1)$.

1.6. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Геометрический смысл решения

41. Найдите все значения параметра (параметров), при каждом из которых система уравнений не имеет решения.

$$1) \begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -2x + 9(a^2 - 2)y = 6a - 2, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} ax - 2y = 4, \\ 0,35x - 0,14y = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -4x + ay = 1 + a, \\ (a + 6)x + 2y = 3 + a \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} a^2x + (2 - a)y = 4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y = a^5 - 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + py = 1, \\ px + y = 1 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + a^2y = a - 2 + a^2, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} ax + y = 4, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

42. Найдите все значения параметра (параметров), при каждом из которых система уравнений имеет бесконечно много решений

$$1) \begin{cases} (a - 2)x + 27y = \frac{9}{2}, \\ 2x + (a + 1)y = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x + ay = 2, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (m - 2)x + 7y = 9, \\ (m + 1)x + 2(m + 2)y = 18 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + (m - 1)y = 3, \\ (m + 1)x + 4y = -3 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + by = b + 2, \\ (b + 1)x + 2by = 2b + 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + 2y = 2a - 3, \\ 2x + a^2y = b \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} (a - 1)x + by = 2, \\ 9x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + 8y = 4p - px, \\ px + py = 3p - 3y - 1 \end{cases}$$

43. Найдите значения параметра (параметров), при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение.

$$1) \begin{cases} 2ax + y = a + 1, \\ x + 3ay = a + 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 16ax + y = 1, \\ 4x + ay = a \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (a + 1)x - y = a, \\ (a - 3)x + ay = -9 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (a + 1)x - y = a + 1, \\ x + (a - 1)y = 2 \end{cases}$$

44. Найдите все значения параметра (параметров), при каждом из которых система уравнений имеет решение.

$$1) \begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 2, \\ x + 4y = a \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2|x - a| \leq y + a, \\ x + |y - a| = a + 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - a \geq 3|y + a|, \\ |x + a| + y = 2 - a \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b + 1)y = 2b + 4 \end{cases}$$

45. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых все решения $(x; y)$ системы уравнений $\begin{cases} x - 3ky = 3, \\ kx - 12y = 6 \end{cases}$ удовлетворяют условиям $x > 1, y < 0$.

46. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых все решения системы $\begin{cases} x - ky = 3, \\ kx - 4y = 6 \end{cases}$ удовлетворяют условиям $x > 1, y < 0$.

47. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых все решения системы $\begin{cases} x + ky = 3, \\ kx + 4y = 6 \end{cases}$ удовлетворяют условиям $x > 1, y > 0$.

48. Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ -6x + 3y = -15 \end{cases}$.

49. Найдите все значения параметра (параметров), при каждом из которых система уравнений имеет бесконечно много решений, причем одно из этих решений $x = 1, y = 3$.

$$1) \begin{cases} bx + y = 1, \\ 4x - 2y = b \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

50. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решение системы уравнений $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ удовлетворяет условию $x > y$.

51. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых решение системы уравнений $\begin{cases} 2x + y = b + 2, \\ x - y = b \end{cases}$ удовлетворяет условию $x - y < 0$

52. Поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, а мимо моста длиной l метров — в течение t_2 секунд. Определите скорость и длину поезда.

53. Сосуд, наполненный жидкостью, имеет два крана. Если открыть оба крана на a часов, а потом второй кран закрыть, то вся оставшаяся в сосуде жидкость выльется через первый кран за b часов. Если через a часов закрыть первый кран, то оставшаяся жидкость выльется через второй кран через c часов. За какое время вся жидкость может вылиться через каждый кран, открытый отдельно?

54. Трое рабочих должны выполнить некоторую работу. Производительность труда третьего рабочего равна среднему арифметическому производительностей первых двух. Если бы третий проработал отдельно a дней, то для завершения работы первому потребовалось бы b дней, а второму — c дней. За какое количество дней могут выполнить всю работу первый и второй рабочие, работая отдельно?

55. Числа x и y являются решениями системы уравнений $\begin{cases} ax + y = a + 1, \\ x + 4ay = 3 \end{cases}$. Найдите все значения параметра, при каждом из которых выражение $x^2 - 6y^2$ принимает наибольшее значение.

56. Числа x и y являются решениями системы уравнений $\begin{cases} -x + ay = 2a, \\ ax - y = 3a - 5 \end{cases}$. Найдите все значения параметра, при каждом из которых выражение $x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение.

57. Числа x и y являются решениями системы уравнений $\begin{cases} ax + 9y = a + 3, \\ x + ay = 2 \end{cases}$. Найдите все значения параметра, при каждом из которых выражение $3y^2 - x^2$ принимает наибольшее значение.

58. Числа x и y являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x + ay = 3a, \\ ax + y = a + 4 \end{cases}$. Найдите все значения параметра, при каждом из которых выражение $2x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение.

59. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(a; b)$ которых таковы, что указанная система уравнений имеет единственное решение. Изобразите

фигуру Φ и составьте уравнения прямых, проходящих через точку $M(m; n)$ и имеющих с фигурой Φ единственную общую точку.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} ax + (b-4)y = 2, \\ (a-4)x + by = 3, \\ bx - (a+6)y = 3 \end{cases} & M(0; 7) & 2) & \begin{cases} ax + 4y = 2, \\ bx + ay = -1, \\ (b+3)x + (a+8)y = -3 \end{cases} & M(-6; 4) \\ 3) & \begin{cases} (a+2)x + by = 1, \\ ax + (b-2)y = 2, \\ (b+4)x - ay = 2 \end{cases} & M(10; 0) & 4) & \begin{cases} ax + by = 1, \\ 3x + ay = -1, \\ (a-1)x + (b+2)y = -2 \end{cases} & M(4; 3) \end{aligned}$$

1.7. Линейное неравенство с двумя переменными

60. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством $x + 2y - 3 > 0$

61. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством $x - 2y + 3 \leq 0$

62. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное системой неравенств

$$1) \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + 1 \geq 3, \\ x - y + 2 \leq 1 \end{cases}$$

63. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все решения неравенства $a^2 - x^2 \geq (a+x)(4-a)$ принадлежат отрезку $[-2; 3]$.

64. Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - (x-1)^2 \geq 0$.

65. Найдите целочисленные решения системы неравенств

$$1) \begin{cases} x + y < 2,5 \\ x - y > -3 \\ y > 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y < 3, \\ x - y > -2,5 \\ y > 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 7x + y < 7, \\ 7x - y + 7 > 0, \\ y > 5 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 9x + y - 9 < 0, \\ 9x - y + 9 > 0, \\ y - 7 > 0 \end{cases}$$

66. Используя метод областей, найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x+a}{2x-a+3} \geq 0$ верно при любом значении переменной $x \in [0; +\infty)$.

67. Используя метод областей, найдите все значения переменной x , каждая из которых является решением неравенства $2(2a - x + 4) \leq (x + a)(2a - x + 4)$ для любого значения параметра $a \in [-1,5; 0,5]$.

68. Найдите все значения параметра a , при которых среди решений неравенства $|x - a| + |x - 2| \leq 4 - a$ содержится ровно два целых числа.

69. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x - 4a + 1}{x - a} \leq 0$ верно для любого значения переменной $x \in [1; 2]$.

70. Найдите все значения переменной x , удовлетворяющие неравенству $\frac{a - x + 1}{x + 2a} \geq 0$ для любого значения параметра $a \in [2; 3]$.

71. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все решения неравенства $(a - 2x + 1)(2a + x - 4) \geq 0$ принадлежат отрезку $[-1; 2]$.

72. Найдите все значения переменной x , каждое из которых удовлетворяет неравенству $\frac{a - x - 3}{2a + 2x - 3} > 1$ при любом значении параметра $a \in \left[-3; -\frac{3}{2}\right]$.

73. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все решения неравенства $\frac{4x + 3}{a + x - 1,5} < -2$ принадлежат интервалу $\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$.

74. Найдите все значения переменной x , каждая из которых является решением неравенства $2(2a - x + 4) \leq (x + a)(2a - x + 4)$ для любого значения параметра $a \in [-1,5; 0,5]$.

75. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

76. В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 копеек, синий — 13 копеек. На покупку карандашей можно потратить не более 4 рублей 95 копеек. Число синих ка-

рандашей не должно отличаться от числа красных более чем на пять. Необходимо закупить максимально возможное суммарное число карандашей, при этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно купить?

1.8. Уравнения и неравенства, приводимые к линейным уравнениям

77. Решите уравнения:

$$1) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} = 0 \quad 2) \frac{7x+8}{21} - \frac{x+4}{8x-11} = \frac{x}{3}$$

$$3) \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3 \quad 4) \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{(x+2)(x+3)}$$

$$5) \frac{1}{3x-1} + \frac{2(x+1)}{x-1} - \frac{3x^2+1}{(3x-1)(x-1)} = 1$$

78. Решите уравнения:

$$1) \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$$

$$2) \frac{x^2-4x+4}{x-1} + \frac{x^2-3x-1}{x-2} - \frac{2(x^2-5x+5)}{x-3} = 0$$

$$3) \frac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10} = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \quad 4) \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}$$

$$5) \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-5}{x-6} + \frac{x-2}{x-3}$$

79. Решите уравнения:

$$1) \frac{3+2x}{1+2x} - \frac{5+2x}{7+2x} = 1 - \frac{4x^2-2}{(1+2x)(7+2x)}$$

$$2) \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x\right) = \frac{\left(x-3 + \frac{5x}{2x-6}\right) \cdot \frac{3x}{2}}{2x-1 + \frac{15}{x-3}}$$

$$3) \frac{2}{1 + \frac{3+x}{5-3x}} + \frac{1}{3 - \frac{5x+1}{2x-1}} = 1 \quad 4) \frac{1}{3 + \frac{4}{2-5x}} + \frac{1}{2 - \frac{7x}{2x+1}} = 1$$

$$5) \frac{1 + \frac{2x-3}{x+2}}{2 + \frac{3x-4}{2x+4}} + \frac{2 + \frac{3x+2}{2x-1}}{3 + \frac{5x+3}{2x-1}} = 1$$

80. Решите уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям относительно переменной x .

$$1) \frac{x^2-25}{x+5} = x-5 \quad 2) \frac{x-3}{x-3} = 1 \quad 3) \frac{x-2}{x-a} = 0 \quad 4) \frac{x-a}{x+3} = 0$$

$$5) \frac{x-a}{a-2} = 0 \quad 6) \frac{3+2x}{2-x} = 3a \quad 7) \frac{a(x-2)}{x-a} = 0 \quad 8) \frac{a(x-a)}{x-2} = 0$$

$$9) \frac{x-a}{(x-4)(x+1)} = 0 \quad 10) \frac{(x-4)(x+1)}{x-a} = 0$$

81. Решите уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям относительно переменной x , при всех допустимых значениях параметров.

$$1) \frac{mx-3}{x-1} = 0 \quad 2) \frac{2mx+5}{x-10} = 0 \quad 3) \frac{2a}{x-1} = 1 \quad 4) \frac{x}{a-1} - \frac{x}{a} = \frac{4a^2-1}{a(a-1)}$$

$$5) \frac{mx}{m-x} = 1 \quad 6) \frac{ax}{3a-x} = 2 \quad 7) \frac{ax-4}{a-x} = 1 \quad 8) \frac{1}{x-2a} = \frac{2}{ax-1}$$

$$9) \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x} \quad 10) \frac{x-3m}{x^2-9} - \frac{2m+3}{x+3} = \frac{m-5}{x-3}$$

82. Решите неравенства, приводящиеся к линейным неравенствам относительно переменной x при всех допустимых значениях параметра.

$$1) \frac{a^2x+1}{2} - \frac{a^2x+3}{3} < \frac{a+9x}{6} \quad 2) \frac{ax+1}{3} - \frac{x-4a}{2} \geq \frac{a^2}{6}$$

$$3) \frac{3x+1}{a^2-1} - \frac{2x-1}{a-1} \leq \frac{x-1}{a+1} \quad 4) \frac{mx+1}{3} + \frac{4m-x}{2} < \frac{m^2}{6}$$

$$5) \frac{x}{m} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4m} \quad 6) \frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(m+1)}$$

$$7) \frac{mx}{m-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4} \quad 8) m \frac{x+1}{x-1} > 1$$

1.9. Задачи, использующие график линейной функции

83. Сегодня утром, собираясь на работу, я заметил, что стрелки часов совпали где-то между 6 и 7 часами. Интересно, какое точное время показывали эти часы?

84. Из пункта A в пункт B выехала грузовая машина, а через полчаса за ней в том же направлении выехала легковая машина. Еще через

час следом за ними выехал мотоциклист, который обогнал обе машины в тот момент, когда машины поравнялись. Мотоциклист прибыл в пункт B на 1 час раньше грузовой машины. Через какое время после прибытия мотоциклиста в пункт B туда пришла легковая машина?

85. В 10 часов утра группа туристов вышла из лагеря и отправилась в поход с постоянной скоростью, рассчитывая сделать привал в 14 часов. В 12 часов один из туристов вспомнил, что оставил в лагере котелок, побежал обратно, взял нужную вещь и с той же скоростью, с какой возвращался, нагнал группу в момент начала привала. В какое время он был в лагере?

86. Некоторое предприятие изготавливает продукцию двух видов A и B , используя при этом три вида сырья M , N и K . Нормы использования ресурсов и их запасы заданы в таблице:

Вид ресурса	Расход ресурса	Расход ресурса на единицу продукции	
		A	B
M	3600	6	6
N	2000	4	4
K	4000	4	8

Требуется определить максимально возможное количество выручки от продажи продукции этого предприятия, если цены на продукцию A и B равны соответственно 1200 и 1500 рублей за единицу.

87. На двух шахтах добывается руда: на первой — 100 тонн в день, на второй — 220 тонн в день. Эта руда ежедневно перерабатывается на двух заводах, причем первый может перерабатывать в день не более 200 тонн руды, а второй — не более 250 т. Стоимость перевозок одной тонны руды до завода определяется из следующей таблицы:

	Первый завод	Второй завод
Первая шахта	5	4
Вторая шахта	7	5

Сколько тонн руды нужно возить с каждой шахты на каждый завод, чтобы общая стоимость перевозок была бы наименьшей?

88. Для увеличения выпуска продукции решено расширить производство за счет использования имеющейся свободной площади в 70 кв. метров, на которой предполагается установить оборудование двух видов общей стоимостью не более 100 млн. рублей. Каждый комплект

оборудования первого вида занимает 20 кв. метров, стоит 10 млн. рублей и позволяет получить за смену 40 единиц продукции. Каждый комплект оборудования второго типа занимает 10 кв. метров, стоит 30 млн. рублей и позволяет получить за смену 80 единиц продукции. Определить значение максимально возможного прироста выпуска продукции.

89. Требуется приобрести партию холодильников двух типов — «Ока» и «Север» в количестве не менее 43 штук. Цена холодильника «Ока» вдвое превышает стоимость холодильника «Север». При каком количестве холодильников «Ока» достигается минимум расходов на покупку, если число холодильников «Ока» не должно отличаться от удвоенного количества холодильников «Север» более чем на три?

90. У школьника было некоторое количество марок, ему подарили альбом для марок. Если он наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома, а если он наклеит по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него будет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

91. Путь из A в B плот проплывает за 24 ч, а катер тратит на путь из A в B и обратно менее 10 ч. Если собственную скорость катера увеличить на 40 %, то путь из A в B и обратно займет не более 7 ч. Сколько времени плывет катер из A в B и сколько времени плывет он из B в A ?

92. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

93. Если пионеров лагеря построить в колонну по 8 человек в ряду, то один ряд окажется неполным. Если построить по 7 человек в ряду, то рядов будет на 2 больше, и все они будут полными. Если же строить по 6 человек в ряду, то рядов будет еще на 7 больше, но один ряд будет заполнен не весь. Сколько пионеров в этом лагере?

94. Имеется некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, вмещающие по 600 м проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. То же самое произойдет, если пользоваться только катушками, вмещающими по 900 м проволоки, причем таких катушек потребуется на 3 штуки меньше. Если же проволоку намотать только на катушки, вмещающие по 1100 м, то потребуется еще

на 6 катушек меньше, но все катушки будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было?

95. Если жидкость разлить в бутылки емкостью 40 л, то при этом одна бутылка окажется не совсем полной. Если ту же жидкость разлить в бутылки емкостью 50 л, то понадобится на 5 бутылей меньше и все они будут заполнены. Если жидкость разлить по бутылкам емкостью 70 л, то понадобится еще на 4 бутылки меньше, но опять одна бутылка будет неполной. Сколько было литров жидкости?

96. При покупке нескольких одинаковых книг и одинаковых тетрадей за книги уплатили 1056 руб., а за тетради — 56 руб. Книг купили на 6 штук больше, чем тетрадей. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 100 руб. превосходит цену одной тетради?

97. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 3400 до 3900 руб. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, и поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 20 руб. больше. Сколько стоил магнитофон?

98. Бригады, состоящие из одинакового числа рабочих, получили со склада спецодежду. Каждый рабочий получил по два комплекта спецодежды, а каждой бригаде выдали на 20 комплектов больше, чем было бригад. Если бы бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдавали бы по 12 комплектов, то спецодежды на складе не хватило бы. Сколько комплектов спецодежды было на складе?

99. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 ч быстрее товарного. Если бы каждый из поездов шел то время, которое затратил другой поезд на путь от A до B , то пассажирский поезд проехал бы на 280 км больше, чем товарный. Если бы скорость каждого из поездов была бы увеличена на 10 км/ч, то в этом случае пассажирский поезд проходил бы расстояние AB на 2 ч 24 мин быстрее товарного поезда. Найдите расстояние между городами A и B .

100. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу: один из пункта A в пункт B , а другой из пункта B в пункт A и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же, напротив, увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 мин раньше. Определите время встречи автобусов в случае, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.

101. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно выхо-

дят навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посередине между городами A и B . Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A , лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 км от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B , поплыли бы обе против течения, то лодка, вышедшая из A , догнала бы лодку, вышедшую из B , в 150 км от B . Найдите расстояние между городами A и B .

102. Велосипедист проехал из пункта A в пункт B по пути, состоящему из подъема и спуска, общей длиной 60 км и потратил на подъем и спуск одинаковое время. Дальше он проехал за 4 ч расстояние от пункта B до пункта C по ровной дороге, длина которой на 19 км больше, чем длина подъема по пути из A в B . С какой скоростью он ехал на подъеме, если известно, что его скорость на спуске больше скорости на подъеме на 6 км/ч, а скорость по ровной дороге равна среднему арифметическому скоростей на подъеме и спуске?

103. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 ч после его отправления, потом проходит пункт B не ранее 14 ч того же дня и, наконец, прибывает в пункт A одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 ч после встречи с первым пассажирским поездом. Найдите время прибытия в пункт первого пассажирского поезда.

104. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 ч. Весь путь от A до B и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость (т.е. скорость в стоячей воде) моторной лодки увеличилась на 40 %, то тот же путь (т.е. путь от A до B и обратно) занял бы у лодки не более 7 ч. Найдите время, за которое моторная лодка проходит путь из A в B в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

105. Из пункта A в пункт B выходит в 8 ч утра скорый поезд. В этот же момент из B в A выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в два раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд в пункт B прибывает в 13 ч 50 мин того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее 10 ч 30 мин утра. Найдите время прибытия пассажирского поезда в пункт A , если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа.

106. В 7 ч утра из пункта A в пункт B по течению реки отправляются катер и байдарка. Байдарка прибывает в пункт B в 17 ч этого же дня. Катер же, дойдя до пункта B , мгновенно повернул обратно и на своем пути из B в A встретил байдарку не позднее 15 ч, а прибыл в пункт A не ранее 23 ч того же дня. Найдите время прибытия катера в пункт B , если известно, что собственная скорость (т.е. скорость в стоячей воде) катера в два раза больше собственной скорости байдарки.

107. В 9 ч утра из пункта A выезжает велосипедист, который едет до пункта B . Через два часа после выезда велосипедиста из A в B выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позже 12 ч дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт B , мгновенно поворачивает и едет из B в A . На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт A в 17 ч того же дня (т.е. дня выезда велосипедиста). Найдите время прибытия велосипедиста в пункт B , если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 ч.

108. Утром из пункта A в пункт B отправляется по течению реки моторная лодка. Одновременно из B в A выходит катер, собственная скорость которого (т.е. скорость в стоячей воде) в 1,4 раза больше собственной скорости моторной лодки. Известно, что лодка и катер встречаются в 12 ч дня, потом лодка прибывает в пункт B не позже 15 ч дня, а катер прибывает в пункт A не ранее 15 ч дня. Найдите время отправления лодки из пункта A в пункт B , если известно, что на путь из B в A лодка затрачивает не более 9 ч, а катер на путь из A в B затрачивает не менее 4,5 ч.

109. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет два решения

$$1) |3x - a + 4| + |5x + 3a| = 3 \quad 2) ||2x - 5| - 1| = x + a$$

§ 2. Квадратное уравнение и квадратичная функция

2.1. Решение уравнений и неравенств с параметрами по определению

1. Решите уравнение при всех допустимых значениях параметра (параметров)

$$1) (k-5)x^2 + 3kx - (k-5) = 0 \quad 2) ax^2 - (a+1)x + a^2 + a = 0$$

$$3) 2x^2 - (a-1)x + a + 1 = 0 \quad 4) (a+1)x^2 - x + (1-a) = 0$$

$$5) ax^2 = 1 \quad 6) (a-1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$$

$$7) x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0 \quad 8) x^2 + 2x - 8 - a(x-4) = 0.$$

2. Решите уравнения

$$1) x^2 - 2ax + a(a+1) = 0 \quad 2) 4x^2 - 15x + 4a^3 = 0 \quad 3) x^2 - 4x + a = 0$$

4) Поезд был задержан на станции на t минут. Чтобы наверстать опоздание, машинист увеличил скорость на a км/час и на следующем перегоне длиной b км наверстал потерянное время. С какой скоростью поезд шел после выезда со станции?

2.2. Дискриминант квадратного трехчлена

3. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня.

$$1) x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0 \quad 2) 4x^2 + (m-2)x + m - 3 = 0$$

$$3) 4x^2 - 2x + m = 0 \quad 4) 2x^2 - 2(2m+1)x + m(m-1) = 0$$

$$5) 2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0 \quad 6) (2m+3)x^2 + (m+1)x + 4 = 0$$

$$7) (a-1)x^2 + 2(a+3)x + 2a = 0 \quad 8) ax^2 - 2(a-2)x + 2a - 1 = 0$$

4. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнению удовлетворяет единственное значение переменной.

$$1) ax^2 - (2a+6)x + 3a + 3 = 0 \quad 2) (a-1)x^2 + (a+4)x + a + 7 = 0$$

$$3) ax^2 + (4a+2)x + 3a + \frac{3}{2} = 0 \quad 4) (a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3 = 0$$

$$5) x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0 \quad 6) x^2 + m(m+1)x + 36 = 0$$

5. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение решений не имеет.

$$1) x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0 \quad 2) 4x^2 + (m-2)x + m - 3 = 0$$

$$3) 4x^2 - 2x + m = 0 \quad 4) 2x^2 - 2(2m+1)x + m(m-1) = 0$$

$$5) 2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0 \quad 6) (2m+3)x^2 + (m+1)x + 4 = 0$$

$$7) (a-1)x^2 + 2(a+3)x + 2a = 0 \quad 8) ax^2 - 2(a-2)x + 2a - 1 = 0$$

6. Решите уравнение $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$, если известно, что один из его корней равен 0.

7. Найдите все значения параметра, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (a+3)x + a^2 = 0$ равен 3.

8. Найдите значения параметров p и q корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются числа p и q .

9. Найдите все значения параметров p и q , при которых числа 3 и -5 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

10. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнение $(a^2 + 2b)x^2 + (b^2 + 2a + 1)x + 1 = 0$ имеет корни, причем хотя бы один из них равен 1.

11. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнение $(a^2 + 2a)x^2 - (b^2 + 2b)x + 2 = 0$ имеет корни, причем хотя бы один из них равен -1.

Неотрицательность дискриминанта является условием равносильным существованию корней. Поэтому в ряде задач, в которых дано существование корней или в которых корни находятся, надо сделать вывод, что и дискриминант должен быть неотрицателен.

12. Решите уравнение $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

13. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$, $a > 0$

14. Решите уравнение $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$.

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

16. Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа u и z , удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.

17. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $x^2 + 3xy + 3ay^2 + \left(\frac{9}{2} - a\right)y + 4x + 5 = 0$

1) имеет хотя бы одно решение при $y = 2$;

2) имеет хотя бы одно решение (x, y) .

18. При каких значениях параметра a существует единственная пара (x, y) , удовлетворяющая уравнению $ax^2 + (3a+2)y^2 + 4axy - 2ax + (4-6a)y + 2 = 0$?

19. Найдите наибольшее значение z , для которого существуют числа x и y , удовлетворяющие уравнению $2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 1$.

20. Найдите наибольшее значение выражения $(x-y)^2 + (z-u)^2$, если числа x, y, z, u удовлетворяют уравнению $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 + (u-2)^2 = 1$.

2.3. Соотношение между корнями квадратного трехчлена.

Теорема Виета

21. Найдите значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $5x^2 - ax + 12 = 0$ на 1,4 больше другого.

22. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма корней квадратного уравнения $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней.

23. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^2 = 0$ был бы квадратом другого.

24. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых разность корней уравнения $2x^2 - (a+1)x + a - 1 = 0$ равна их произведению.

25. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых произведение корней уравнения $x^3 - 2x + a^2 - 5a + 6 = 0$ равно нулю.

26. Найдите значения параметра, при каждом из которых отношение корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равно 2.

27. Найдите все значения параметра, при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$ равна 17.

28. Найдите все значения параметра, при каждом из которых сумма корней уравнения $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ равна нулю.

29. Найдите все значения параметра, при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей.

30. Наибольшее значение параметра a , при котором уравнение $(5a-1)x^2 - (5a-2)x + 3a-2 = 0$ имеет равные корни, принадлежит интервалу:

1) (1;3) 2) (0;1) 3) (-1;1) 4) (1;2).

31. Значение параметра a , при котором один из корней уравнения $x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого принадлежит интервалу

1) (1;2) 2) (0;1) 3) (3;5) 4) (2;3).

32. Найти сумму значений параметра a , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$ равна 17.

1) 2 2) -2 3) 5 4) -3.

33. Значение параметра a , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ принадлежит интервалу

1) (1;3) 2) (0;1) 3) (-1;2) 4) (1;2).

34. Модуль разности значений параметра a , при которых отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4 , равен

1) 0 2) 13 3) 12 4) 6.

35. Найдите значения параметра m , при каждом из которых один из корней уравнения $9x^2 - 18(m-1)x - 8m + 24 = 0$ был в два раза больше другого.

36. Найдите значения параметра m , при каждом из которых удвоенное произведение корней уравнения $\left(m^2 - \frac{13}{3}m + \frac{13}{9}\right)x^2 + 3mx + 2 = 0$ равно квадрату одного из его корней.

37. Найдите значения параметра m , при каждом из которых разность корней уравнения $5x^2 - 2(5m+3)x + 5m^2 + 6m + 1 = 0$ не зависит от значения параметра m .

38. Найдите значения параметра m , при каждом из которых разность квадратов корней уравнения $3x^2 - mx + 2 = 0$ будет равна $\frac{35}{9}$.

39. Найти все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} ax^2 - 2(a+1)x + a + 5 \leq 0, \\ (a+1)x^2 - 2(a+2)x + a + 2 \geq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

40. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня

$$1) \left(\frac{x+|x|}{x} - a\right)^2 = x^2 - 6x + 25 \quad 2) \left(\frac{x-|x|}{x} + a\right)^2 = x^2 + 6x + 25$$

$$3) \left(\frac{x+3|x|}{2x} - a\right)^2 = x^2 - 8x + 25$$

2.4. Сохранение знака значений квадратного трехчлена

Представим критерии того, что квадратный трехчлен принимает значения одного знака на всей числовой прямой.

Условие	Критерий
1. $(f(x) > 0 \forall x)$	1. $\begin{cases} D_f < 0, \\ a > 0 \end{cases}$
2. $(f(x) \geq 0 \forall x)$	2. $\begin{cases} D_f \leq 0, \\ a > 0 \end{cases}$

Условие	Критерий
3. $(f(x) < 0 \forall x)$	3. $\begin{cases} D_f < 0, \\ a < 0 \end{cases}$
4. $(f(x) \leq 0 \forall x)$	4. $\begin{cases} D_f \leq 0, \\ a < 0 \end{cases}$

41. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых квадратный трехчлен $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$ положителен для любого x .

42. При каких значениях параметра неравенство $\frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ справедливо при всех значениях x ?

43. При каких значениях параметра квадратный трехчлен $y = (a^2 + 6a - 4)x^2 - 2(a - 1)x - 1$ принимает отрицательные значения при всех значениях переменной x ?

44. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $ax^2 + (a - 1)x + a - 3 < 0$ верно при всех значениях переменной x .

45. При каких значениях параметра a неравенство $-1 < \frac{ax^2 + x + 2}{x^2 + 1} < 3$ верно при всех значениях переменной x ?

46. При каких значениях параметра m квадратный трехчлен $y = (6m - 5)x^2 - 5(m - 1)x + 2m - 6$ есть полный квадрат?

47. При каких значениях параметра неравенство $\frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ справедливо при всех значениях x ?

48. При каких значениях параметра квадратный трехчлен $y = (a^2 + 6a - 4)x^2 - 2(a - 1)x - 1$ принимает отрицательные значения при всех значениях переменной x ?

49. Найдите все значения параметра a , при которых квадратный трехчлен $y = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$ положителен для любого x .

50. Найдите сумму всех целых значений параметра a , при которых неравенство $\frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \leq 3$ верно при всех значениях переменной x .

51. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{a - x^2 - 10}{2a + x^2 - 4x} \leq 0$ тождественно верное.

52. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{2a - x + 1}{a + x^2 + 1} < 1$ тождественно верное.

53. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{2x^2 + 8x + 15}{a + x^2 + 2x + 15} > 1$ верно при всех значениях переменной x .

54. Найдите наименьшее целое значение параметра m , при котором квадратный трехчлен $y = (-2m - 2)x^2 + (-m - 1)x + 2$ положителен при всех значениях переменной x .

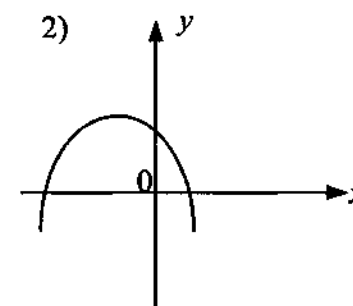
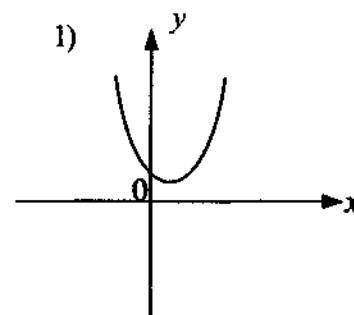
55. Найдите наибольшее целое значение параметра m , при котором квадратный трехчлен $y = (-2m - 2)x^2 + (-2m + 1)x - 1$ отрицателен при всех значениях переменной x .

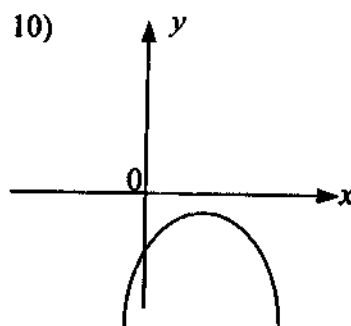
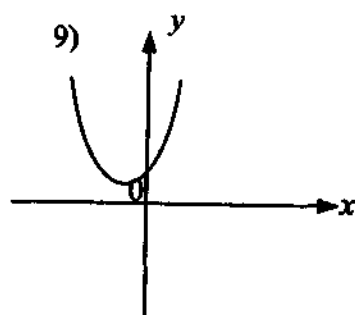
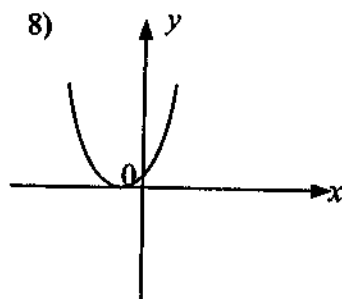
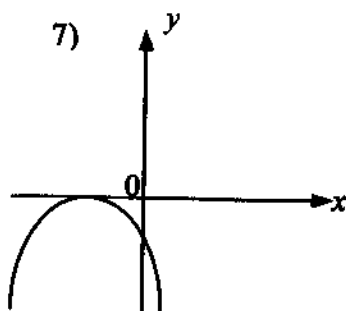
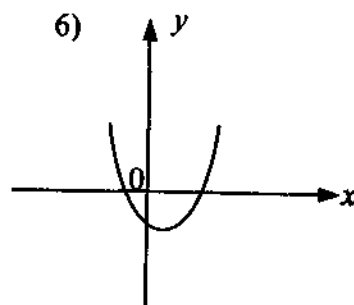
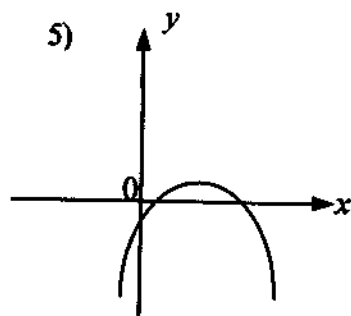
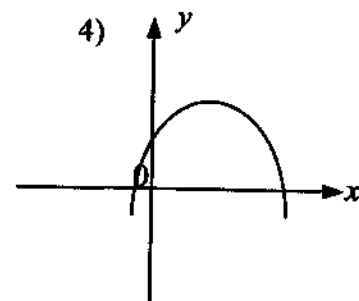
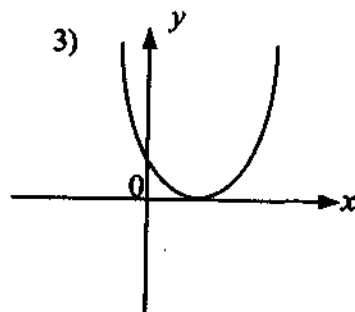
56. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $ax^2 + (a - 1)x + a - 3 < 0$ верно при всех значениях переменной x .

57. При каких значениях параметра a неравенство $-1 < \frac{ax^2 + x + 2}{x^2 + 1} < 3$ верно при всех значениях переменной x ?

58. При каких значениях параметра a существует единственная пара $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$?

59. Укажите знаки параметров a, b, c, D квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. D — дискриминант этого трехчлена.





2.5. Расположение корней квадратного трехчлена относительно начала координат

60. Найдите все значения параметра, при каждом из которых оба корня уравнения положительны.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$ | 2) $4x^2 + (m-2)x + m-3 = 0$ |
| 3) $4x^2 - 2x + m = 0$ | 4) $2x^2 - 2(2m+1)x + m(m-1) = 0$ |
| 5) $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ | 6) $(2m+3)x^2 + (m+1)x + 4 = 0$ |
| 7) $(a-1)x^2 + 2(a+3)x + 2a = 0$ | 8) $ax^2 - 2(a-2)x + 2a-1 = 0$ |

61. Найдите все значения параметра, при каждом из которых оба корня уравнения отрицательны.

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1) $ax^2 - (2a+6)x + 3a+3 = 0$ | 2) $(a-1)x^2 + (a+4)x + a+7 = 0$ |
| 3) $ax^2 + (4a+2)x + 3a + \frac{3}{2} = 0$ | 4) $(a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3 = 0$ |
| 5) $x^2 - 2(a-1)x + 2a+1 = 0$ | 6) $x^2 + m(m+1)x + 36 = 0$ |

62. Найдите все значения параметра, при каждом из которых корни квадратного уравнения противоположны по знаку.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$ | 2) $4x^2 + (m-2)x + m-3 = 0$ |
| 3) $4x^2 - 2x + m = 0$ | 4) $2x^2 - 2(2m+1)x + m(m-1) = 0$ |
| 5) $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ | 6) $(2m+3)x^2 + (m+1)x + 4 = 0$ |
| 7) $(a-1)x^2 + 2(a+3)x + 2a = 0$ | 8) $ax^2 - 2(a-2)x + 2a-1 = 0$ |

63. 1) Натуральное наименьшее значение параметра p , при котором корни уравнения $5x^2 - 4(p+3)x + 4 = p^2$ противоположны по знаку, принадлежит множеству: 1) $(0;1]$ 2) $(1;2]$ 3) $(2;3]$ 4) $(3;4]$ 5) $(4;5]$.

2) Наибольшее целое значение параметра a , при котором уравнение $x^2 - 2(a-1)x + 2a+1 = 0$ имеет корни противоположных знаков, принадлежит множеству: 1) $(0;1]$ 2) $(-1;0]$ 3) $(-2;-1]$ 4) $(3;4]$ 5) $(4;5]$

3) Наибольшее целое число, при которых уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + 2a-3 = 0$ имеет два положительных корня, принадлежит множеству: 1) $(0;1]$ 2) $(5;6]$ 3) $(2;3]$ 4) $(3;4]$ 5) $(4;5]$

4) Наименьшее целое число, при котором уравнение $x^2 - 2(a-1)x + 2a+1 = 0$ имеет положительные корни, принадлежит множеству: 1) $(0;1]$ 2) $(5;6]$ 3) $(2;3]$ 4) $(3;4]$ 5) $(4;5]$

2.6. Расположение корней квадратного трехчлена относительно произвольно выбранной точки p числовой оси

64. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1.

65. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a+1) = 0$ имеет два корня, причем один из них меньше a , а другой больше a .

66. Найдите все значения параметра a , при котором корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .

67. Найдите все значения параметра, при каждом из которых оба корня уравнения $x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0$ больше 1.

68. Найдите все значения параметра, при каждом из которых оба корня уравнения $x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0$ меньше 1.

69. Найдите все значения параметра, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 + (2a+6)x + 4a + 12 = 0$ меньше -1 , а другой — больше 1.

70. Найдите все значения параметра, при каждом из которых оба корня уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ меньше 1.

2.7. Расположение корней квадратного трехчлена относительно интервала $(p; q)$

71. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m = 0$ имеет один корень, меньший 2, а второй — больший 3.

72. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $4x^2 - 2x + m = 0$ имеет два корня, принадлежащие интервалу $(-1; 1)$.

73. Найдите наименьшее целое значение параметра, при котором один из корней уравнения $kx^2 + kx - 2 = 0$ по абсолютной величине будет больше 1, а другой — меньше 1.

74. Найдите сумму целых значений параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ заключены между числами 2 и 4.

75. Найдите все значения параметра a , при котором неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется при всех $x: -1 < x < 0$.

76. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

77. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(x-p)^2(p(x-p)^2 - p-1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

78. При каких значениях параметра a уравнение $(1+a)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 - 3a\frac{x^2}{1+x^2} + 4a = 0$ имеет решение?

79. Найдите все значения параметра, при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$ принадлежат отрезку $[2; 5]$.

80. Найдите все значения параметра, при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ принадлежат отрезку $[-2; 6]$.

81. Найдите все значения параметра, при каждом из которых один из корней уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ меньше 2, а второй — больше 3.

82. Найдите все значения параметра, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 2 = 0$ принадлежит интервалу $(0; 2)$, а второй принадлежит интервалу $(3; 5)$.

83. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня, причем оба они меньше нуля.

$$1) \sqrt[3]{8x^2 - 7x + 2} + \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 8} = \sqrt[3]{(3a-22)x^2 - (6a+97)x + 3a+32} + \sqrt[3]{(20a-198)x^2 - (40a+607)x + 20a+208}$$

$$2) \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 6} + \sqrt[3]{6x^2 - 4x + 3} = \sqrt[3]{(5a-57)x^2 - (10a+204)x + 5a+66} + \sqrt[3]{(12a-138)x^2 - (24a+484)x + 12a+147}$$

2.8. Решение систем уравнений

84. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет два решения.

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = \frac{1}{2} - a \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x+a-2)^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x-2m+1)^2 + y^2 = m^2, \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

85. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение.

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - y^2 = m \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + ay = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = a^2 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y = x^2 - 2x + a, \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

86. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет решение.

$$1) \begin{cases} y = x^2 - 2x + a, \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = 2x - x^2 + a, \\ y^3 = x(2-x) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y^2 - x^2 + (a-2)y - (a+2)x - 2a = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y = x^2 + 2x + 2, \\ x^2 + 2x + y^2 - 2ay + a^2 = 0 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^2 + 2y = 4x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 4x + 2ay \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - a = 2y, \\ y^4 - x^2 + 4x + 8y^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} y + x^2 + 2 = 0, \\ x^2 - y^2 - ax - ay + \frac{x-y}{a} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + 2, \\ y^2 - x^2 + ax + ay - \frac{x+y}{a} + 1 = 0 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x^2 - 6x + (y-a)^2 = 16 \\ \frac{x}{\sqrt{xy}} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y^2 - x^2 + (a-1)x - (a+1)y + a = 0 \end{cases}$$

87. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

88. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases} \quad \text{имеет хотя одно решение}$$

при любом значении параметра b .

89. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение.

$$1) \begin{cases} |x^2 + 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x^2 + 5x + 4| - 9x^2 + 5x + 4 - 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a+1)x + a(a+2) = 0 \end{cases}$$

90. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет ровно 2 решения.

$$1) \begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 - 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a+2)x + a(a+4) = 0 \end{cases}$$

91. Найдите все целые значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет решение. Найдите это решение.

$$1) \begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y - 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + 2,5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x(x+2y-4) + 4m^2 = 8 + 4y - y^2, \\ y^2 - 2y + 2 = 4x(y-x-1) + 2(m^2 + m) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x(x-y-n-1) + y(y+2n+2) + 2n^2 = 0, \\ y(2x-y-4) + 12n^2 = x^2 - 4x + 12n + 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - 4(2x - 2 - 2m - m^2) = y(8 - 2x - y), \\ x^2 - 12x + 40 + y(y - 2x + 12) = 4m(m + 1) \end{cases}$$

92. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет четыре различных решения.

$$1) \begin{cases} (x - 2m + 1)^2 + y^2 = m^2, \\ y^2 = 2x \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x + m + 2)^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = 2mx \end{cases}$$

93. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(2x^2 - y^2 - 1) = x^2 + y^2 - 5, \\ y^2 + 2x = 0 \end{cases}$ имеет не менее трех различных решений.

94. Решите системы уравнений

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = b \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y = a, \\ x^3 + y^3 = b^3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - y = a, \\ xy = b \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x - y = a, \\ x^5 - y^5 = b^5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = a^4 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x + y = a, \\ x^3 + y^3 = a^3 \\ x^5 + y^5 = a^5 \end{cases}$$

95. Решите уравнения, сведя их к симметрическим системам

$$1) (x + a + b)^5 = x^5 + a^5 + b^5 \quad 2) \sqrt{1 - x^2} = (a - \sqrt{x})^2$$

2.9. Взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов

96. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень.

97. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнения $(1 - 2m)x^2 - 6mx - 1 = 0$ и $mx^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень. Вычислите этот корень.

98. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения $(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень.

99. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

100. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{8}{a} - 2a = 0$ и $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ перемежаются, т.е. между двумя корнями одного уравнения лежит ровно один корень другого.

101. Найдите все значения параметра, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$ не перемежаются, т.е. оба эти уравнения имеют по два корня, и между корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого.

101а. Найдите все значения параметра s , при каждом из которых корни уравнений $x^2 + 4x + 4s = 0$ и $x^2 + 3x + 6s = 0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет два корня, но между корнями одного уравнения нет корней другого уравнения.

102. Найдите все значения параметра s , при каждом из которых корни уравнений $x^2 + 3x + 2s = 0$ и $x^2 + 6x + 5s = 0$ различны и перемежаются, т.е. между корнями каждого из уравнений расположен ровно один корень другого уравнения.

2.10. Метод интервалов решения неравенств

Всякое аналитическое выражение, зависящее от переменной, может менять знак в точках, в которых оно обращается в ноль, или точках, в которых график этого выражения терпит разрыв.

Указанные точки разбивают область определения выражения на интервалы, во всех точках каждого из которых значения выражения сохраняют свой знак.

103. Решите неравенства.

$$1) x^2 + \frac{8}{a}x - 2a < 0$$

$$2) x^2 + \frac{6}{a}x - a > 0$$

$$3) (x + 1)^2 > \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}$$

$$4) x^2 + 2x + a > 0$$

$$5) ax^2 + x + 1 > 0$$

$$6) ax > \frac{1}{x}$$

$$7) \frac{1}{x} + \frac{1}{x + a} > \frac{1}{2}$$

$$8) \frac{2a}{x} - \frac{1}{x - 1} > 1$$

$$9) ax^2 - 2ax - 1 < 0$$

$$10) \frac{2a+1}{(a-3)x} > \frac{x+2}{x}$$

104. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство верно для любого положительного значения x .

$$1) (a^3 + (1 - \sqrt{2})a^2 - (3 + \sqrt{2})a + 3\sqrt{2})x^2 + 2(a^2 - 2)x + a + \sqrt{2} > 0$$

$$2) (a^3 + (1 - \sqrt{3})a^2 - (4 + \sqrt{3})a + 4\sqrt{3})x^2 + 2(a^2 - 3)x + a + \sqrt{3} > 0$$

$$3) (a^3 - (1 + \sqrt{2})a^2 + (\sqrt{2} - 3)a + 3\sqrt{2})x^2 + 2(a^2 - 2)x + a + \sqrt{2} > 0$$

$$4) (a^3 + (1 - \sqrt{7})a^2 - (8 + \sqrt{7})a + 8\sqrt{7})x^2 + 2(a^2 - 7)x + a + \sqrt{7} > 0$$

105. Решите задачу

1) Найдите множество значений параметра a , при каждом из которых во множестве решений неравенства $x(x - 2a - 4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$ нельзя расположить два отрезка длины 1,5 каждый, которые не имеют общих точек.

2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{16 - (a + 8)x}{x} < \frac{8a}{x^2} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) - 1$ содержит число 5, а также содержит два непересекающихся отрезка, каждый из которых длины 5.

3) Найдите множество значений параметра a , при каждом из которых решений неравенства $1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x} \left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2} \right)$ содержится в некотором отрезке длины 7, и при этом содержит какой-нибудь отрезок длины 4.

4) Найдите множество значений параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $x^2 - \frac{25a}{x} + 10a < (10 + a)x - 25$ содержит какой-нибудь отрезок длины 7, но не содержит никакого отрезка длины 9.

5). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $3(2a + 3) - x(a - x) < 3\left(\frac{3a}{x} + 2x\right)$ содержит какой-нибудь отрезок длины 5, но не содержит никаких двух непересекающихся отрезков, каждый из которых длиной 3.

6) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{9 - (a + 6)x}{x^2} < \frac{3a}{x^2} \left(\frac{3}{x} - 2 \right) - 1$ содержит число 4, а также содержит два непересекающихся отрезка длиной 4 каждый.

7) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых во множестве решений неравенства $x(x - 2a - 6) + a^2 < \frac{6a^2}{x} - 12a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

106. Решите неравенство при всех неотрицательных значениях параметра.

$$1) a^3 x^4 + 6a^2 x^2 - x + 9a + 3 \geq 0 \quad 2) 4a^3 x^4 + 4a^2 x^2 + 32x + a + 8 \geq 0$$

$$3) 16a^3 x^4 + 8a^2 x^2 + 16x + a + 4 \geq 0 \quad 4) a^3 x^2 + 2a^2 x^2 - 8x + a + 4 \geq 0$$

107. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система имеет решение.

$$1) \begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 < 1, \\ y = ax^2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - y^2 > 1, \\ y = ax^2 + 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - (y - a)^2 > 1, \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

108. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система неравенств имеет единственное решение.

$$1) \begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq a, \\ x^2 - 2x \leq 3 - 6a \end{cases}$$

109. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система имеет решение, образующее на числовой оси отрезок длины 1.

$$1) \begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leq 4a \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leq a, \\ x^2 - 4x \leq 1 - 4a \end{cases}$$

110. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система имеет хотя бы одно решение.

$$1) \begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + (2 - 3a)x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0, \\ x + a^2 = 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 + \left(1 - \frac{3}{2}a\right)x + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} < 0, \\ x = a^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

111. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система неравенств решений не имеет.

$$1) \begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ a \geq 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geq 0, \\ ax \geq a^2 - 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{a^2x+2a}{ax-2+a^2} \geq 0, \\ ax+a > \frac{5}{4} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)} \geq 0, \\ x-8 \geq ax \end{cases}$$

112. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система неравенств имеет решение.

$$1) \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3, \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2b-1}{2b+5} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geq \frac{3a+1}{a+2}, \\ 3x^2 + xy + y^2 \leq 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x^2 - 8xy - 8y^2 \geq 2, \\ x^2 - 4xy + 2y^2 \leq \frac{c+1}{2c+1} \end{cases}$$

§ 3. Различные задачи с параметрами, использующие свойства линейной и квадратичной функций

1. Даны три уравнения

$$1) x^2 - (a+b)x + 8 = 0;$$

$$2) x^2 - b(b+1)x + c = 0;$$

$$3) x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый корень первого уравнения является корнем третьего и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c , если $b > 3$.

2. Даны три уравнения

$$1) x^2 + ax + ac = 0;$$

$$2) x^2 - bx + c^3 = 0;$$

$$3) x^4 - bx^2 + c^3 = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый корень первого уравнения является корнем третьего и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c .

3. Даны три уравнения

$$1) ax^2 + bx + c = 0;$$

$$2) cx^2 + bx + a = 0;$$

$$3) x^2 + a^2x + c^2 = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно также, что каждый корень третьего уравнения является корнем первого и по крайней мере один из корней второго уравнения удовлетворяет третьему уравнению. Найти числа a, b, c , если $a > 2|c|$.

$$4. \text{Решите уравнение } \min_a (a^2 - 2ax + 3x) = \max_b (-b^2 + 4bx - 3x^2 + 1).$$

$$5. \text{Решите уравнение } \max_b \min_a (a^2 - 2ab - b^2 - 2ax + 10bx) = 7.$$

6. Найти все значения параметра a , при которых система неравенств
$$\begin{cases} ax^2 - 2(a+1)x + a + 5 \leq 0, \\ (a+1)x^2 - 2(a+2)x + a + 2 \geq 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - x^2 + a^2 - 3a = 1$ имеет 3 различных корня.

8. Найти наибольшее значение параметра k , при котором система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 2k - 2, \\ x + y + z = k \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

$$9. \text{Решите систему уравнений } \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0, \\ x + by + b^2z + b^3 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

10. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x + y + z + a(y + z) + a^2z + a^3 = 0, \\ x + y + z + b(y + z) + b^2z + b^3 = 0, \\ x + y + z + c(y + z) + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

11. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^4 = 0, \\ x + by + b^2z + b^4 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^4 = 0 \end{cases}$$

12. Найдите все тройки целых чисел x, y, z , для которых справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}} + \frac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}} > \frac{3}{\sqrt{3x+2y-5z-4}} + x^2 + 7x + 11.$$

13. Решите уравнение в целых числах:

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0$$

14. Найдите все пары значений параметров a и b , при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$
 имеет не менее пяти решений.

15. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеют ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

16. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(2a+4)x^2 + (5a+10)x + a+10 = 0$ имеет два корня и между этими корнями расположен ровно один корень уравнения.

$$(a-1)x^4 - (a-1)x^3 - (a-7)x^2 + (10a+5)x - a + 12 = 0.$$

17. Решите уравнение $x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}$.

18. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0, a > 0$

19. Решите уравнение $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$.

20. Найти все значения параметра β , при которых уравнение $(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = \beta$ имеет три различных корня.

21. Решите уравнение $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$.

22. Решите уравнение $\frac{(x-a)^2 + x(x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x(x-a) + x^2} = \frac{19}{7}$.

23. Решить уравнение $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = a(a-1)$.

24. Найдите действительные решения уравнения $\left(\frac{x+a}{2}\right)^6 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^6 = a^6$.

25. Решите уравнение $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$.

26. Решите уравнение $(1+x+x^2)^2 = \frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$.

27. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 = ax + by, \\ y^3 = bx + ay \end{cases}$$

28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0, \\ 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \end{cases}$$

29. Найдите все целые значения n , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2} \end{cases}$$
 имеет решение. При найденных значениях n решите систему.

30. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y^3 - 3x + 2 = 0, \\ z^3 - 3x + 2 = 0, \\ x^3 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

31. Найти значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2 \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$
 имеет решение и каждое ее решение удовлетворяет условию $x + y = 0$.

32. Найдите целые значения a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} x(x+2y-4) + 4n^2 = 8+4y-y^2, \\ y^2 - 2y + 2 = 4x(y-x+1) + 2(n^2+n) \end{cases}$$
 имеет решение.

33. Найдите все целые значения a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$
 имеет решение.

34. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1, \\ \frac{xz}{x+z} = 2, \\ \frac{yz}{y+z} = 3 \end{cases}$$

35. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y^3 - 7x + 6 = 0, \\ z^3 - 7y + 6 = 0, \\ x^3 - 7z + 6 = 0 \end{cases}$$

36. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = xyz, \\ y = \frac{2x}{1-x^2}, \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \end{cases}$$

37. Найдите все пары чисел $(a; b)$, при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$
 имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

38. Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

39. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0, \\ x(y+1-a) + y(2a-3) + a + 3 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

40. Среди всех решений системы
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$
 найдите те, при

которых выражение $b + d$ принимает наибольшее значение.

41. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} = 7\sqrt{6x - 5} + \sqrt{a^2 - 9a + 18}$ имеет единственное решение.

42. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29} \end{cases}$$

43. Найдите все числа $(x; y)$, удовлетворяющие условиям.

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^3 = \sqrt{xy} \cdot x^2 y^2 \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \geq 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases}$$

44. Найдите минимум выражения

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x - y|.$$

45. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|.$$

46. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

47. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 10x + 13}.$$

48. Решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x - 2y - 2| = 2\sqrt{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

49. Среди решений неравенства $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 13 + \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$ найдите те, при которых сумма $x + y$ принимает наименьшее значение.

50. Найдите значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
 имеет

единственное решение.

51. Найдите наименьшее значение выражения

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2}$$

52. Решите систему:
$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0,2|4y-3x+12| = 5, \\ 4x-y \leq 0 \end{cases}$$

53. Решите систему
$$\begin{cases} |y-2x| + \left| \frac{x-2}{x-2} - 1 \right| = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \leq 10 \end{cases}$$

54. Решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0,2|4y-3x+12| = 5, \\ x^2 + (y+3)^2 \leq 25 \end{cases}$$

55. Решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \geq 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \leq 2\sqrt{13} \end{cases}$$

56. Решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \geq 5, \\ |y-x-2| + |(x-4)(x-8)| + (x-4)(x-8) = 0 \end{cases}$$

57. Найдите наибольшее значение y , для которого существуют значения x и z , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} yz + x\sqrt{1-z^2} = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-0,6)^2 + (y+0,8)^2} + 1 \end{cases}$$

58. Найдите наименьшее значение x , для которого существуют значения y и z , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} yz + x\sqrt{1-z^2} = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-0,6)^2 + (y-0,8)^2} + 1 \end{cases}$$

59. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2} \\ (x-10)^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$
 имеет решение.

60. Решите уравнение

$$(2x+1)(\sqrt{(2x+1)^2 + 7} + 1) + 3x(\sqrt{9x^2 + 7} + 1) = 0.$$

61. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $x^2 - 2c \sin(\cos x) + 2 = 0$ имеет единственное решение.

62. При каких значениях параметров уравнение $|x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cos^4 4a| + |x + \sin^2 a| = b \left(a + \frac{3\pi}{2} \right)$ имеет единственное решение?

63. Решите уравнение $\sin^4 x + (a-4)\sin^2 x - 3(a-1) = 0$ при всех значениях параметра.

64. Решите уравнение $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = a$ при всех значениях параметра.

65. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ при всех значениях параметра.

66. При каких значениях параметра уравнение $\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2} \right) \sin 3x + \frac{a}{2} = 0$ имеет ровно три корня на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right]$.

67. При каких значениях параметра уравнение $\cos^2 4x + (a-3)\cos 4x = 0$ имеет ровно 4 корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \right]$.

68. Решите уравнение $a^x + a^{-x} = 2 \cos x$ при всех значениях параметра.

69. Решите уравнение $\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}$ при всех допустимых значениях параметра.

70. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 6x + a - 0$, зная, что оно имеет три действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

71. Решите уравнение $x^3 + x^2 = a$, зная, что оно имеет три действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

72. Найдите все значения параметра, при каждом из которых четыре действительных корня уравнения $x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

73. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $x^6 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно 4 корня, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии.

74. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнения будут иметь единственное решение.

$$1) (x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$$

$$2) (x-2)(x-4)-5(x-2)\sqrt{\frac{x-4}{x-2}}=(a-2)(a+3)$$

$$3) (x-5)(x-1)+3(x-5)\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}=(a-2)(a+1)$$

$$4) (x+2)(x+4)+5+\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}=(a-2)(a+2)$$

75. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет два решения

$$1) \log_3(9^x+9a^3)=x \quad 2) \log_2(4^x-a)=x$$

76. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - a - 3 = 0$ имеет решение. Найдите эти решения.

77. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство $\operatorname{tg}^2(\sin \sqrt{9\pi^2 - a^2}) - 2a \operatorname{tg}(\sin \sqrt{9\pi^2 - a^2}) + a + 2 \leq 0$ имеет, и притом конечное число решений. Для каждого значения параметра указать эти решения.

78. Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди решений неравенства $\log_{a^2}(x-a) < 0$ нет ни одного целого числа.

79. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство $1 + \log_7(x^2+1) \geq \log_7(ax^2+4x+a)$ верно при всех значениях переменной x .

80. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $\log_{(a-2)}\left(\frac{17}{8} + \cos x + \sin \frac{x}{2}\right) = 3$ имеет решение.

81. Решите при всех значениях параметра

$$1) \sqrt{25^x - 4 \cdot 5^x + 9} = 5^x - b \quad 2) 2 - x < \sqrt{x^2 + (1-2b)x + (4b-6)}$$

$$3) \log_6(|x+c|-4) = \log_6(2-x) \quad 4) \log_3 \frac{x}{d} + \log_d x \geq -5$$

$$5) \log_2(ax) + \log_a x \leq 1 \quad 6) \log_{\frac{1}{3}}(23 + |6x - 5 - x^2|) = c$$

82. Найдите все значения параметров, при каждом из которых наибольшее значение выражения $|8x^2 + ax + b|$ на отрезке $[m; n]$ будет наименьшим.

83. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $|x-p^2| + |2p-x| = 6-p$ будет иметь бесконечное множество решений.

84. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений

$$1) \begin{cases} a \cos y + \sin x + 1 = 0, \\ \log_z(-1-4 \sin x) = \log_z(a) \cdot \log_a(1+2 \cos y), \\ \log_a z + \log_a\left(\frac{4-a}{a}\right) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a \sin x + (1-2a) \cos y = 2, \\ \log_a(1-2 \sin x) = \log_a z \cdot \log_z \cos y, \\ \log_z\left(\frac{a}{10-a}\right) = 1 \end{cases}$$

имеет решение.

85. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

86. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| + \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| - \left| 1 - 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| = 5 - \left(\sin \frac{\pi(y-2x)^2}{12} \right)^2 \\ 10 - 9(x^2 + (y-a)^2) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{8}{9} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

87. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ имеет решение для любого значения параметра b .

88. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ имеет единственное решение.

89. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$ имеет решение для любого значения параметра b .

90. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

91. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$ имеет решение, причем каждое решение удовлетворяет условию $x + y = 0$.

92. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a^x + a^y = \frac{1}{2}, \\ x + y = b^2 + 1 \end{cases}$

- 1) имеет хотя бы одно решение;
- 2) имеет единственное решение;
- 3) имеет решение при любом значении параметра b .

93. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство

$$1) \log_3 (a \cos 2x + (1 + a^2 - \sin^2 x) \cos x + 4 + a) < 1$$

$$2) \log_3 (a \cos 2x + (1 + a^2 - \cos^2 x) \sin x + 4 - a) < 1$$

верно при всех значениях переменной x .

94. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение

$$1) 4^x + (a^2 + 5)2^x + 9 - a^2 = 0 \quad 2) 9^x + (b^2 + 6)3^x - b^2 + 16 = 0$$

не имеет решения.

95. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система

$$1) \begin{cases} \sin(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 2 \cdot 3^{|x|} + 3^{2-|x|} \leq 19 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \cos(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 8 \cdot 9^{|x|} - 22 \cdot 6^{|x|} + 9 \cdot 2^{2|x|} \leq 0 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

96. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(x-p)^2(p(x-p)^2 - p-1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

97. Найдите все пары чисел p и q , при которых неравенство $|x^2 + px + q| > 2$ не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

98. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^5 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

99. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(2a+4)x^2 + (5a+10)x + a+10 = 0$ имеет два корня и между этими корнями расположен ровно один корень уравнения $(a-1)x^4 - (a-1)x^3 - (a-7)x^2 + (10a+5)x - a + 12 = 0$.

100. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(1+a)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 - 3a\frac{x^2}{1+x^2} + 4a = 0$ имеет решение.

Список использованной литературы

1. *Аверьянов А.Н.* Системное познание мира. — М., 1985.
2. *Айсмонтас Б.Б.* Педагогическая психология. Схемы и тесты. — М., Владос-пресс, 2006.
3. *Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами. — М., Асар, 1996.
4. *Ананьев Б.Г.* Некоторые проблемы психологии взрослых. — М., Знание, 1972.
5. *Антонов А.В.* Системный анализ. — М., Высшая школа, 2006.
6. *Аргинская И.И.* Математика. Методическое пособие к учебнику 2-го класса четырехлетней начальной школы. — М., Центр общего развития, 2000.
7. *Баркер Джозел.* Парадигмы мышления. — М., Альпина бизнес букс, 2007.
8. *Богоявленская Д.Б.* Психология творческих способностей. — М.: Академия, 2002. С. 86.
9. *Богоявленская Д.Б., Богоявленская М.Е.* Психология одаренности вып. 1–2. — М., МИОО, 2005.
10. *Босс В.* Интуиция и математика. — М., Айрис-пресс, 2003.
11. *Браверман Э.М.,* Преподавание физики, развивающее ученика. Кн. 1–3. — М., Ассоциация учителей физики, 2005.
12. *Брадис В.М., Истомина Н.С., Маркулевич А.И., Сикорский К.П.* Алгебра для 8–10 классов средней школы. Часть 1–2. — М., Учпедгиз, 1957.
13. *Вергеймер М.,* Продуктивное мышление. — М., Прогресс, 1987.
14. *Виленкин П.Я., Иващев-Мусатов О.С., Шварцбург С.И.* Алгебра и математический анализ. Учебник для 11 класса. — М., Просвещение, 2003.
15. *Волков И.П.* Социальная психология малых групп и коллективов (опыт экспериментальных и прикладных исследований контактных групп): Автореф. докт. дис. — Ленинград, 1978. С.31.
16. *Выготский Л.С.* Мышление и речь. Собрание сочинений в 6 т., — М., 1982.
17. *Ганзен В.А.* Системные описания в психологии. — Ленинград. Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.
18. *Гельфман Э.Г., Холодная М.А.* Психодидактика школьного учебника. — СПб., Питер пресс, 2006.
19. *Гершунский Б.С.* Философия образования 21 века: в поисках практико-ориентированной образовательной концепции. — М., Интер Дисконт+, 1997.
20. *Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б.* Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий. — М., УРСС, 2006.
21. *Голви Тимоти.* Работа как внутренняя игра. — М., Альпина бизнес букс, 2007.
22. *Голубев В.И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М., Илекса, 2007.
23. *Горбачев В.И.* Технология развивающего обучения в курсе алгебры средней школы. Диссертация на соискание ученой степени доктора пед. наук. — Брянск, 2000.
24. *Горбачев В.И.* Элементы теории и общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами. — Брянск, Изд-во БГПУ, 1998.
25. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. — Киев, 1992.
26. *Городицкий А.* Системная педагогика. Опыт, размышления, проекты. — Денвер-Рига. Эксперимент, 2000.
27. *Громыко Ю.Н.* Новое содержание образования. — М., Пушкинский институт, АО Московский учебник, 2001.
28. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. — М., Вербум-М., 2003.
29. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Справочное пособие, — М. Просвещение, 1988, С. 160.
30. *Давыдов В.В.* Виды обобщений в обучении. — М., Просвещение, 1972.
31. *Давыдов В.В.* Педагогическая психология. — М., Педагогика, 1991.
32. *Давыдов В.В.* и др. Программа развивающего обучения по математике (система Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова). I–III классы. — М., МИРОС, 2000.
33. *Даллингер В.А., Борисова Л.П.* Методические системы развивающего обучения математике в начальной школе. — Омск, Изд-во ОмГПУ, 2004.
34. *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.* Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. — М., Наука 1976.
35. *Drucker Peter,* Post-Capitalist Society, New York, HarperBusines, 1994.
36. *Епишева О.Б., Крутич В.И.* Учить школьников учиться математике. — М., Просвещение, 1990.
37. *Епишева О.Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. Книга для учителя. — М., Просвещение, 2003 г.
38. *Жилин Д.М.* Теория систем. Опыт построения курса. — М., УРСС, 2007.
39. *Жуков А.В.* Где ошибка? // Математическое образование №6(1), 2001 г.
40. Закон об образовании РФ № 3266-1 от 10 июля 1992 года.

41. *Завяич Л.И., Рязановский А.Р.* Алгебра. Задачник для классов с углубленным изучением математики. 7, 8, 9 классы. — М., Мнемозина, 2005–2007.
42. *Зиновьева Н.А.* Сравнительный анализ особенностей развития познавательных особенностей младших школьников, обучающихся в различных образовательных системах // Ярославский психологический вестник. Выпуск 16. — Москва–Ярославль: Изд-во «Российское психологическое общество», 2005.
43. Избранные вопросы методики преподавания математики. Учебно-методическое пособие. — М., МГПУ, 2006.
44. *Ильин Е.Н.* Путь к ученику. — М., Просвещение, 1988.
45. *Ильин Е.Н.* Рождение урока. — М., Педагогика, 1986.
46. *Ильина О.Н.* Современные парадигмы и системы начального математического образования как условия формирования вычислительных навыков. // Интернет журнал СахГУ «Наука, образование, общество».
47. *Киселев А.П.* Алгебра. — М., Физматлит, 2005.
48. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. — М., Наука, 1987.
49. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике. Т. 1–2. — М., Просвещение 1977.
50. *Корешкова Т.А., Глазков Ю.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Тренировочные задачи. — М., Просвещение. Эксмо, 2005.
51. *Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Тренировочные задачи. — М., Просвещение. Эксмо, 2005.
52. *Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Типовые тестовые задания. — М., Экзамен, 2006.
53. *Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Типовые тестовые задания. — М., Экзамен, 2007.
54. *Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Типовые тестовые задания. — М., Экзамен, 2008.
55. *Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Тренировочные задачи. — М., Просвещение. Эксмо, 2007.
56. *Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В.* Математика. Тренировочные задачи. — М., Просвещение. Эксмо, 2008.
57. Краткий словарь современных понятий и терминов. — М., Республика, 2000.
58. *Круглов Ю.Г.* Креативная педагогика: методология, теория, практика. — М., МГОПУ им. М.А. Шолохова, изд. центр «Альфа», 2002.
59. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников. — М., Институт практической психологии, 1998.
60. *Крылов А.А.* Системный подход как основа исследований инженерной психологии и психологии труда. В книге «Методология исследований по инженерной психологии и психологии труда». — Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.
61. *Кудрявцев Л.Д.* О тенденциях и перспективах математического образования. // — МО, 1998.
62. *Кузьмин В.П.* Исторические предпосылки и гносеологические основания системного подхода. // Психологический журнал, 1982, т. 3, № 3, № 4.
63. *Лейтес И.С.* Возрастная одаренность школьников. — М., Академия, 2000.
64. *Леонтьев А.Н.* Проблемы развития психики. — М., Мысль, 1965.
65. *Лефрансуа Г.и.* Психология для учителя. — М., Олма-пресс, 2003.
66. *Ломо Б.Ф.* Системность в психологии. — М., Институт практической психологии, 1996.
67. *Лунгу К.Н.* Систематизация приемов учебной деятельности студентов при обучении математике. — М., URSS, 2007.
68. *Макарычев Ю.П., Миндюк Н.Г., Нешков К.И.* Алгебра. Учебник для 9 класса с углубленным изучением математики. — М., Просвещение, 2000.
69. *Мирков В.К.* Метод координат и задачи с параметрами. — М., Просвещение, 1970.
70. Методика и технология обучения математике. Курс лекций. Под редакцией Стефановой Н.Л., Подходовой Н.С. — М., Дрофа, 2005.
71. *Мирошин В.В.* Задачи о касательных к параболам // Потенциал, № 9, 2007.
72. *Мирошин В.В.* Задачи про проценты и проценты. // Потенциал, № 2, 2006.
73. *Мирошин В.В.* Построим прямую. // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 17.
74. *Мирошин В.В.* Формулы геометрии помогают алгебре. // Квант, № 3 2007.
75. *Мирошин В.В., Рязановский А.Р.* Математика. Решение задач повышенной сложности. — М., Интеллект-центр, 2007.
76. *Моденов В.П.* Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод. — М., Экзамен, 2006.
77. *Моденов В.П.* Математика в школе, 2001., № 5.
78. *Моденов И.С., Новоселов С.И.* Математика. Пособие для поступающих в ВУЗы. — М., МГУ, 1966.
79. *Мордкович А.Г.* Алгебра 7, 8, 9, 10–11. Учебник. — М., Мнемозина 2005.
80. *Мордкович А.Г.* Алгебра 7, 8, 9, 10–11. Задачник. — М., Мнемозина 2005–2006.
81. *Мордкович А.Г.* Уравнения и неравенства с параметрами. Математика. Приложение к газете «Первое сентября», 1994, № 34.

82. *Нахимов В.В.* Методологические проблемы кибернетики: в 2-х т. — М., МГУ, 1970.
83. *Натяганов В.Л., Лужина Л.М.* Методы решения задач с параметрами. — М., МГУ, 2003.
84. *Немов Р.С.* Психология. Кн. 1–2. — М., Просвещение, 2004.
85. *Никандров Н.Д.* Пути активизации познавательной деятельности студентов в лекционном преподавании. — Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1978.
86. *Никифоров Г.С.* Психологические основы самоконтроля (в системах «человек — машина»): Автореф. докт. дис. — Ленинград, 1978.
87. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра и начала анализа. Учебник. 11 класс. — М., Просвещение, 2006.
88. *Новик И.Б.* Системный стиль мышления. — М., Знание, серия «Философия», №1, 1986.
89. *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры. — М., «Высшая школа», 1956.
90. *О'Коннор Дж., Макдермот Иан.* Искусство системного мышления. — М., Альпина бизнес букс, 2006.
91. *Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. — М., Изд-во МГУ, 1991.
92. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. — М., Высшая школа, 1989.
93. *Перышкин А.В., Родина Н.А.* Физика-7. — М., «Просвещение» 1997.
94. *Пойа Д.* Математическое открытие. — М., Наука, 1976.
95. *Пойа Д.* Как решается эта задача. — М., Наука, 1972.
96. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. — М., Наука, 1975.
97. *Полат Е.С.* Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. — М., Академия, 2000.
98. Программы для общеобразовательных школ, лицеев, гимназий. Математика. 5–11 классы. — М., Дрофа, 2002.
99. Психология развития. Учебник для высших психол. учебных зав., — М., Академия, 2005.
100. *Радугин А.А.* Философия. Курс лекций. — М., Центр, 2001.
101. *Реан А.А.* Психология подростка. Учебник. — М., Олма-пресс, 2004.
102. *Решетова З.А.* Формирование системного мышления в обучении. — М., Единство, 2002.
103. *Родионов Е.М.* Математика. Решение задач с параметрами. — М., Изд-во НЦ ЭНАС, 2006.
104. *Роу Дж. Алан.* Креативное мышление. — М., NT Press, 2007.
105. *Рубинштейн С.Л.* Основы общей психологии. — М., Учпедгиз, 1946.
106. *Самсонов П.И.* Методика построения учебного курса по алгебре и началам анализа для классов различной профильной направленности. Диссерт. на соискание ученой ст. канд. пед. наук. — М., 2004.
107. *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике в средней школе. — М., Просвещение, 2002.
108. *Саранцев Г.И.* Упражнения в обучении математике. — М., Просвещение, 2005.
109. *Селевко Г.К.* Современные образовательные технологии. — М., Народное образование, 1998.
110. *Стенберг Р., Григоренко Е.* Учись думать творчески! (12 теоретически обоснованных стратегий обучения творческому мышлению). Основные современные концепции творчества и одаренности. — М.: Молодая гвардия, 1997.
111. *Столяр А.А.* Педагогика математики. — Минск, Высшая школа, 1974.
112. *Спирidonov В.Ф.* Психология мышления. Решение задач и проблем. — М., Генезис, 2006.
113. *Суходольский Г.В.* Инженерно-психологический анализ и синтез профессиональной деятельности: Автореф. докт. дис. — Ленинград, 1982.
114. *Талызина Н.Ф.* Педагогическая психология. — М., Просвещение, 1998.
115. *Терстон У.* Об обучении математике. — М., Изд-во МЦНМО, // Математическое просвещение. Серия 3, выпуск 11, 2007.
116. *Тихомиров В.М.* Газета «Математика» № 2 2007.
117. *Ткачук В.В.* Математика абитуриенту. — М., МИАН, 2002.
118. Толковый словарь математических терминов. — М., Просвещение, 1967.
119. Толковый словарь русского языка. Под ред. Б.М. Попова, Д.Н. Ушакова. — М., Государственное издательство иностранных и национальных словарей, 1939, Т. 3.
120. *Тынякин С.А.* Пятьсот сорок задач с примечаниями. — Волгоград, 1991.
121. *Филатова Л.О.* Развитие ответственности школьного и вузовского образования. — М., Битом, 2005.
122. Философский энциклопедический словарь. — М., ИНФРА-М, 1997–2003.
123. *Фридман Г.И.* Сюжетные задачи по математике. — М., Школьная пресса, 2002.
124. *Фридман Л.М.* Теоретические основы методики обучения математике. — М., УРСС, 2004.
125. *Хомяков П.М.* Системный анализ. — М., УРСС, 2007.
126. *Щадриков В.Д.* Введение в психологию: способности человека. — М., Логос, 2002.

127. *Шадриков В.Д.* Интеллектуальные операции. — М., Логос, 2006.
128. *Шадриков В.Д.* Ментальное развитие человека. — М., Аспент пресс, 2007.
129. *Шадриков В.Д.* Проблемы системогенеза профессиональной деятельности. М., Наука, 1982.
130. *Шарыгин И.Ф.* Стандарт по математике. 500 геометрических задач. — М., Просвещение, 2005.
131. *Шаталов В.Ф.* Куда исчезли тройки. — М., Педагогика, 1979.
132. *Шафаревич И.Р.* Математическое мышление и природа. — М., // Математическое образование, № 2(5), 1998.
133. *Шестаков С.А., Юрченко Е.В.* Уравнения с параметром. — М., Слог, 1993.
134. *Шпенглер О.* Закат Европы. — М., Мысль, 1993.
135. *Шумакова И.Б.* Психология одаренности. Вып. 3. — М., МИОО, 2005.
136. *Шустер Ф.М.* Методика преподавания алгебры. — Минск, Высшая школа, 1976.
137. *Юдин Э.Г.* Системный подход и принцип деятельности. — М., Наука 1978.
138. *Юрченко Е.В.* Пять проблем методики преподавания математики. — М., Окружной методический центр ЮЗАО, 2006.
139. *Якиманская И.С.* Требования к учебным программам, ориентированным на личностное развитие школьников. Вопросы психологии №2. — М., Школа-пресс, 1994.
140. *Ястребинецкий Г.А.* Уравнение и неравенства, содержащие параметры. — М., Просвещение, 1972.

Мирошин Владимир Васильевич

Решение задач с параметрами

Теория и практика

Издательство «ЭКЗАМЕН»

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Главный редактор *Д.В. Яновский*
Редактор *И.М. Бокони*
Технический редактор *Т.В. Фатюмина*
Корректор *И.В. Русанова*
Дизайн обложки *М.П. Дурискина*
Компьютерная верстка *Н.П. Балахонова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 15, стр. 1.
www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Онщероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры
литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.
641-00-30 (многоканальный).

УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!

Книги издательства «ЭКЗАМЕН» можно приобрести
оптом и в розницу в следующих книоторговых организациях:

Москва

ТД «Библио-глобус» — Тел. (495) 928-43-51
ДК «Мелетиков» — Тел. (495) 476-16-90
ООО «Библиофор» — Тел. (495) 670-52-17
«Молодая гвардия» — Тел. (495) 780-33-70
«Шаг к пятёрке» — Тел. (495) 411-08-29
ГУП «Эдельвейс» — Тел. (495) 932-74-90
Сеть магазинов «Мир школьника»

Архангельск

АВФ-книга — Тел. (8182) 65-41-34

Барнаул

ООО «Летопиcь» — Тел. (3852) 33-60-70

Благовещенск

ЧП Калугин — Тел. (4162) 35-25-43

Владивосток

ОАО ПТДК — Тел. (4232) 63-29-55

Волгоград

ПБОЮЛ Гражданкин Н.П. — Тел. (8442) 95-54-11

ООО «Кассандра» — Тел. (8442) 97-55-55

Вологда

Гросс — Тел. (8172) 72-17-43

Воронеж

ООО «Амгаль» — Тел. (4732) 23-00-02

ООО «Риокса» — Тел. (4732) 21-08-66

Екатеринбург

ПО «Кримп» — Тел. (343) 369-29-25, 369-22-22

ООО «Фоллиант» — Тел. (3432) 74-45-33

ООО «Алис» — Тел. (3432) 55-10-06

Ессентуки

ЧП Зинченко — Тел. (87961) 5-11-28

Ижевск

ООО «УМК» — Тел. (3412) 78-35-04

Иркутск

«Продлитъ» — Тел. (3952) 24-17-77

«Антей книга» — Тел. (3952) 24-20-95

Казань

ООО «Амст-пресс» — Тел. (8432) 43-12-20

ООО «Танис» — Тел. (8432) 72-34-55

Киров

«Книги детям» — Тел. (8332) 51-30-90

Краснодар

ООО «БукПресс» — Тел. (8612) 62-55-48

ООО «Которта» — Тел. (8612) 62-54-97

Перспективы образования — Тел. (8612) 54-25-67

Красноярск

ООО «Градъ» — Тел. (3912) 59-11-52

Ленинск-Кузнецкий

Кругозор — Тел. (38456) 3-30-97

Мурманск

ООО «Гезей» — Тел. (8152) 43-63-75

Новосибирск

ООО «Топ-книга» — Тел. (3832) 36-10-28

ООО «Модус-2» — Тел. (3832) 44-34-44

Нижегород

«Учебная книга» — Тел. (8312) 46-38-66

Диржабль — Тел. (8314) 33-68-82

Оренбург

«Фоллиант» — Тел. (3532) 77-46-92

Пенза

ООО «Апогей» — Тел. (8412) 49-31-21

Пермь

ООО «Тигр» — Тел. (3422) 45-24-37

Петропавловск-Камчатский

ЧП Кожан — Тел. (4152) 11-12-60

Проконьевск

Книжный дом — Тел. (38466) 2-02-95

Псков

ООО «Гелнос» — Тел. (8112) 44-09-89

Пятигорск

ПБОЮЛ Бердякова — Тел. (87933) 3-05-86

ПБОЮЛ Борисковский — Тел. (87933) 9-02-53

Ростов-на-Дону

«Фазтон-пресс» — Тел. (8632) 65-61-64

«Магистр» — Тел. (8632) 99-98-96

Рязань

ТД «Просвещение» — Тел. (4912) 44-67-75

ООО «Барс» — Тел. (4912) 93-29-54

Самара

«Реал +» — Тел. (8462) 41-87-30

«Чакана» — Тел. (8462) 42-96-30

Санкт-Петербург

Дом Книги Сп-Б — Тел. (812) 449-28-74

ООО «Буквоед» — Тел. (812) 346-53-27

Саратов

Полиграфист — Тел. (8452) 29-43-96

ООО «Стрелка К» — Тел. (8452) 52-25-24

«Гемера» — Тел. (8452) 64-37-37

Смоленск

ООО «Кругозор» — Тел. (4812) 65-86-65

ООО «Книжный мир» — Тел. (4812) 38-29-96

ООО «Эрудит» — Тел. (4812) 65-62-94

Сыктывкар

ООО «Комикнига +» — Тел. (8212) 24-37-36

Тверь

«Книжная лавка» — Тел. (4822) 33-93-03

Тула

«Алатея» — Тел. (4872) 35-60-87

«Система +» — Тел. (4872) 31-29-23

Тюмень

ООО «Друг» — Тел. (3452) 21-34-39

ООО «Знание» — Тел. (3452) 25-23-72

Улан-Удэ

ООО «Политом» — Тел. (3012) 55-15-23

Уфа

ООО «Эдипс» — Тел. (3472) 82-89-65

Хабаровск

ООО «Мирс» — Тел. (4212) 39-49-60

Челябинск

ООО Интерсервис ЛГД — Тел. (3512) 21-34-53

Череповец

ПитерПэл — Тел. (8202) 28-20-08

Чита

ООО «Онекс» — Тел. (3022) 26-08-51

«Экспресс» — Тел. (3022) 32-59-64

ЧП Гулин — Тел. (3022) 35-31-20

Якутск

ЧП Аксентчук — Тел. (4112) 42-89-60

«Якутский книжный дом» — Тел. (4112) 34-10-12

Ярославль

Академия — Тел. (4852) 31-43-26

По вопросам прямых оптовых закупок обращайтесь
по тел. (495) 641-00-30 (многоканальный), sale@examen.biz
www.examen.biz

В.В. Мирошин



Пособие посвящено созданию содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе общеобразовательной школы. Предложены методики, устанавливающие общие методы решения задач с параметрами, конкретные примеры, приводимые для усвоения соответствующих методов, подготовленные для использования в практике работы учителей математики.

Пособие предназначено для учителей, желающих создать методическую базу решения задач с параметрами.

Задачный материал содержит более 600 задач и может быть использован школьниками для самоподготовки.

ISBN 978-5-377-02250-3



ЭКЗАМЕН